Escuela Politécnica Nacional

Facultad de Ciencias



Ing.Matemática

Cálculo Diferencial

Estudiante Armando Lara

12 de octubre del 2020

Introducción

El presente texto, tiene como objetivo implementar ayuda a los compañeros de primer semestre que tomarán el curso de Cálculo diferencial, en este texto encontrarán la teoría de la materia, ejercicios resueltos y propuestos, es probable que quizá se encuentre errores en el texto en tal caso me pueden escribir al correo armando.lara@epn.edu.ec, hay que aclarar que este texto está hecho a base de un resumen de otros libros de Cálculo, deseo de todo corazón que te pueda servir, recuerda que estamos siempre para apoyarnos, encontrarás el texto bastante resumido, solamente con las ideas y la teoría más fundamental, recuerda siempre implementar tus conocimientos y preguntar las dudas a tu profesor.

Armando Lara.

Índice general

Capítulo 1

Límites Y Continuidad

1.1. Definición Formal de Límite

Definición:

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a $c \in \mathbb{R}$ (salvo quizá en c). El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a c existe y es igual a $L \in \mathbb{R}$ si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ , \exists \delta > 0\ tal\ que\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon}$$

Reglas Básicas de los límites:

1.- Si m y b son dos constantes, entonces:

$$\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$$

2.- Si k es una constante, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to c} k = k$$

3.-Límite de la función identidad:

$$\lim_{x \to c} c = c$$

4.- Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, entonces:

$$\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

5.- Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x).g(x) = L.M$$

6.- Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces:

$$\lim_{x\to c} (f(x))^n = L^n$$

7.- Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

8.- Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$.
Ejemplos:

1.-Demuestre que $\lim_{x\to 4} (3x - 7) = 5$

Solución:
Usando la definición formal, sea $\epsilon > 0$,debemos hallar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \epsilon$.
Consideremos la desigualdad de la derecha:

$$|(3x - 7) - 5| < \epsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ahora, como $|x - 4| < \delta$ podemos tomar $\delta := \frac{\epsilon}{3}$, efectivamente este δ cumple, pues:

$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = 3|x - 4| < 3\delta = 3(\frac{\epsilon}{3}) = \epsilon$.

2.-Sea $c > 0$, demostrar que $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

Solución:
Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$$

Ahora, $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \dfrac{|\sqrt{x} - \sqrt{c}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|} \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{c}| = \dfrac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \dfrac{|x-c|}{\sqrt{c}}$
Pero como $|x-c| < \delta$, podemos tomar $\delta := \epsilon\sqrt{c}$, este δ efectivamente cumple, pues:
$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{c}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{c}|} \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{c}| = \dfrac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \dfrac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \dfrac{\delta}{\sqrt{c}} = \epsilon$

3.-Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h}$
Solución:
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (\dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}) =$
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4.- Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - x^2 - 12x + 20}$
Solución:
Notemos que: $(x^3 - x^2 - 8x + 12) = (x-2)(x^2 + x - 6)$ y
$(x^3 - x^2 - 12x + 20) = (x-2)(x^2 + x - 10)$ (Regla de Ruffini)

Por tanto $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - x^2 - 12x + 20} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + x - 6)}{(x-2)(x^2 + x - 10)} = 0$

Ejercicios propuestos:

1.- Demostrar que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$

2.- Demostrar que $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$

3.- Demostrar la regla 5

4.- Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

5.- Calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 6x^5 + 9x}{x^3 + 5x^2 - 9}$

6.- Calcular $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

1.2. Límites Laterales

Definición: Límite por la derecha
Sea f una función definida en (a, c). Entonces, el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ por la derecha ($x \to a+$) existe si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon}$$

Donde, $\lim_{x \to a+} f(x) = L$

Definición: Límite por la izquierda
Sea f una función definida en (a, c). Entonces, el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ por la izquierda ($x \to a-$) existe si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon}$$

Donde, $\lim_{x \to a-} f(x) = L$

Teorema:
El $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a $L \in \mathbb{R}$ si y solo si los límites laterales existen y son iguales a L

Ejemplos:

1.- Sea $f(t) = \begin{cases} t+4 \ si \ t \leq -4 \\ 4-t \ si \ -4 < t \end{cases}$ Calcule:

(a) $\lim\limits_{t \to -4^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -4^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -4} f(t)$

Solución:

(a)

$$\lim_{t \to -4^+} f(t) = \lim_{t \to -4} (4-t) = 4-(-4) = 8$$

(b)

$$\lim_{t \to -4^-} f(t) = \lim_{x \to -4} t+4 = 0$$

(c)

$\lim\limits_{t \to -4} f(t)$ no existe porque sus límites laterales no son iguales.

2.- Sea $f(x) = \begin{cases} bx^2+ab; x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2+b}-b; x < 0 \end{cases}$ si se conoce que $f(1) = 1$, halle a y b tal que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ exista

Solución:

Como $f(1) = 1$, $b + ab = 1$, luego aplicando límites laterales:
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (bx^2+ab) = ab$ (1)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2\sqrt{x^2+b}-b) = 2\sqrt{b}-b$ (2)

Igualando (1) y (2): $2\sqrt{b}-b = ab \Rightarrow 2\sqrt{b} = ab+b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{4}$ y $a = 3$

3.- Sea $f(x) = \begin{cases} 1-x^2; \ x \leq 1 \\ 1; \ 1 < x \leq 2 \\ |x-3|; \ x > 2 \end{cases}$, Calcular:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución:

Como $|x-3| = \begin{cases} x-3; \ x \geq 3 \\ 3-x; \ x < 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \ f(x) = \begin{cases} 1-x^2; \ x \leq 1 \\ 1; \ 1 < x \leq 2 \\ 3-x; \ 2 < x < 3 \\ x-3; \ x \geq 3 \end{cases}$

(a)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (1-x^2) = 0$

Como los límites laterales no coinciden, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

(b)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (3-x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (1) = 1$

Por tanto, como los límites laterales son iguales, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

4.- Calcular (si existe) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + [[3x]]}$

Solución:

Notemos que como $z \leq x < z+1$ para algún $z \in \mathbb{Z}$,para $x = \dfrac{5}{2}$, $7 \leq 3x \leq 8$

Por tanto $[[3x]] = \begin{cases} 7; \dfrac{7}{3} \leq x < \frac{8}{3} \\ 8; \dfrac{8}{3} \leq x < 3 \end{cases}$

Luego, $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{x + [[3x]]} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{x+7} = \sqrt{\dfrac{19}{2}}$

Ejercicios Propuestos:

1.- Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4; x < 2 \\ 4; x = 2 \\ 4 - x^2; x > 2 \end{cases}$ Calcular: (a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

2.- Sea $F(x) = \begin{cases} |x - 1|; x < -1 \\ 0; x = -1; \\ |1 - x|; x > -1 \end{cases}$

Calcule: (a) $\lim\limits_{x \to -1^+} F(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to -1^-} F(x)$, (c) $\lim\limits_{x \to -1} F(x)$

3.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{[[x]] - x}{x}$

4.- ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{\dfrac{1}{4x^2} - 16}$?

5.- Calcular (si existe) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + |1 - x|}{x^2 + 1}$

1.3. Límites infinitos y al infinito

Definición:
Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a $c \in \mathbb{R}$, salvo quizá en c, decimos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ si:

$$\boxed{\forall N > 0, \exists \delta > 0 \;\; \textit{tal que si} \;\; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > N}$$

Definición:

Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a $c \in \mathbb{R}$, salvo quizá en c, decimos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ si:

$$\boxed{\forall N < 0, \exists \delta > 0 \;\; \textit{tal que si} \;\; 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < N}$$

Teorema:

Si r es cualquier entero positivo, entonces:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty; & si\ r\ es\ impar \\ +\infty; & si\ r\ es\ par \end{cases}$

Demostración: inciso i

Sea $N > 0$, hay que probar que $\exists\delta > 0$ tal que si $0 < x < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^r} > N$.

Como $x > 0$ y $N > 0$, entonces $x^r < \dfrac{1}{N}$, luego como $r > 0$: $x < (\dfrac{1}{N})^{\frac{1}{r}}$, así podemos tomar $\delta := (\dfrac{1}{N})^{\frac{1}{r}}$, este delta cumple, pues si $0 < x < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^r} > N$

Teorema:

Si $c \in \mathbb{R}$ y si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, donde $a \neq 0 \in \mathbb{R}$, entonces:

1.- *Si $a > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de f, entonces:* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

2.- *Si $a > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de f, entonces:* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

3.- *Si $a < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de f, entonces:* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

4.- *Si $a < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de f, entonces:* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Teorema:

1.- *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) + g(x) = +\infty$*

2.- *Si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, *entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x) + g(x) = -\infty$

3.- *Si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, *si* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

4.- *Si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, *si* $a < 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = -\infty$

5.- *Si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, *si* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = -\infty$

6.- *Si* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$, *si* $a < 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

Definición: Asíntota vertical

La recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciado se cumple:

(i) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = +\infty$

(iv) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Ejemplos:

1.- Demostrar que $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty$

Solución:

Sea $N > 0$, hay que hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < x - 2 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-4} > N$,

notemos que:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} > \frac{1}{(x+2)\delta} \ (1)$$

(ya que $x - 2 < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{\delta}$).

De (1) hay que acotar $\dfrac{1}{x+2}$, es decir hay que hallar $M > 0$ tal que $\dfrac{1}{x+2} >$

M.
En (1) tomemos $\delta_1 = 1$, luego:

$$\begin{aligned} 0 &< x-2 < 1 \\ 4 &< x+2 < 5 \\ \frac{1}{5} &< \frac{1}{x+2} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así tomamos $M = \frac{1}{5}$, de aquí tenemos que $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{\delta}$ (2) y $\frac{1}{x+2} > \frac{1}{5}$ (3)

Multiplicando (2) y (3): $\frac{1}{x^2-4} > \frac{1}{5\delta}$ y tomamos $\delta_2 = \frac{1}{5N}$

Por lo cual $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{5N}\right\}$

2.- Probar que $\lim_{x\to -2} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} = -\infty$

Solución:

Sea $N < 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} < N$, notemos los siguiente:

$$|x+2| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} > \frac{1}{\delta^2}$$

Por tanto, $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} < \frac{(x+1)(x+3)}{\delta^2}$ claramente en la desigualdad izquierda el denominador es estrictamente mayor a cero, por lo cual debemos hallar $M < 0$ que garantice $(x+3)(x+1) < M$ (pues recordemos que $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ debe ser menor que cero), para ello veamos la siguiente gráfica:

Vemos que la función $g(x) = (x+1)(x+3)$ es negativa cuando $-3 < x < -1$,

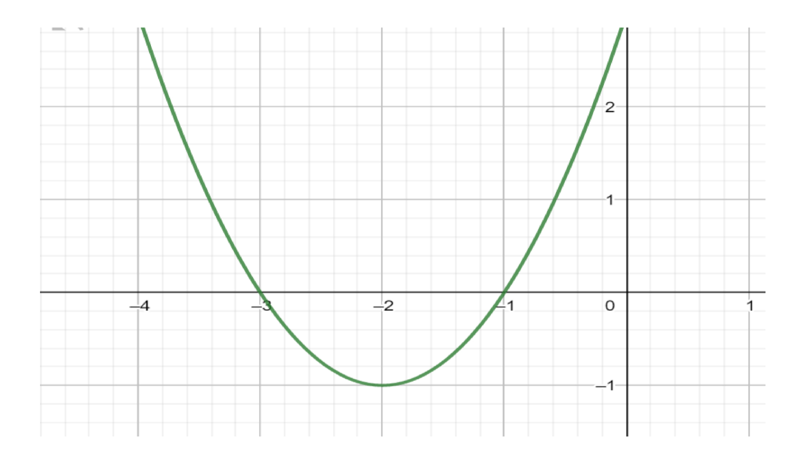


Figura 1.1: Gráfica de $(x+1)(x+3)$

de aquí:

$$-3 < x < -1$$
$$-1 < x+2 < 1$$

Luego, como el límite es en -2 debemos elejir valores cercanos a -2, así pues tomemos por ejemplo $\delta_1 = \frac{1}{2}$, por tanto tenemos: $|x+2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < x+2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-5}{2} < x < \frac{-3}{2}$
Ahora, como $g(x) < 0$ para estos valores debemos hallar $M < 0$ en este intervalo tal que $g(x) < M\, \forall x \in (\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2})$, vemos que en la figura esta función es decreciente en $(-3,-2)$ y creciente en $(-2,-1)$, pero como g(x) es par el máximo es:
$g(x) < g(\frac{-5}{2}) = g(\frac{-3}{2}) = \frac{-3}{4}$, así hemos encontrado que $M = \frac{-3}{4}$
Luego tenemos que $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} < \frac{M}{\delta^2} \Rightarrow N = \frac{M}{\delta^2} \Leftrightarrow \delta = \sqrt{\frac{M}{N}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-3}{N}}$, de aquí $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-3}{N}}\right\}$

3.- Calcular $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{t^2-3}{t^3+t^2}$

Solución:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-3}{t^3+t^2} = \frac{\lim\limits_{t\to 0^+} t^2-3}{\lim\limits_{t\to 0^+}(t^3+t^2)} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

Definición: Límites al infinito

i) Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una función él limite de la función* $f(x)$ *cuando* x *crece sin limite es él número* L *y denotamos por* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$*, si:*

$$\boxed{\forall\epsilon>0,\ \exists N>0 \ tal\ que\ si\ \ x>N \to |f(x)-L|<\epsilon}$$

ii) Sea $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ *una función él limite de la función* $f(x)$ *cuando* x *decrece sin limite es él número* L *y denotamos por* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$*, si:*

$$\boxed{\forall\epsilon>0,\ \exists N<0 \ tal\ que\ si\ \ x<N \to |f(x)-L|<\epsilon}$$

Teorema:

Sea n *un entero positivo cualquiera, entonces:*

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demostración:

i)

Sea $\epsilon>0$, hay que hallar $N>0$ tal que si $x>N \Rightarrow |\frac{1}{x^n}-0|<\epsilon$, vemos que:

$$|\frac{1}{x^n}|<\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^n}<\epsilon$$

pero como $x>N \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{x^n} < \frac{1}{N^n}$, (pues $N>0$)

de aquí tomamos $\epsilon = \dfrac{1}{N^n} \Leftrightarrow N = \sqrt[n]{\dfrac{1}{\epsilon}}$

ii) La demostración es similar a i), pero tomando en cuenta los casos cuando n es par y cuando n es impar.

Observación:

Para calcular límites al infinito usualmente (sobre todo cuando se tiene polinomios), se divide tanto el numerador como el denominador, entre la mayor potencia de x que aparece en la expresión dada, luego se aplica el criterio del teorema anterior.

Ejemplos:

4.- Probar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$

Solución:

Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $N > 0$ tal que:

$$x > N \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} - 1 \right| < \epsilon$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+1}{x-1} - 1 \right| &= \left| \frac{x+1-x+1}{x-1} \right| \\ &= \frac{2}{|x-1|} \end{aligned}$$

Abriendo el valor absoluto, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} &> \frac{1}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow x &> 1 + \frac{2}{\epsilon} \end{aligned}$$

De aquí, tomamos $N := 1 + \dfrac{2}{\epsilon}$

5.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x+5}{3x^2-2x+1}$

Solución:

Vamos a calcular este límite recordando la observación, notando que la varaible con mayor exponente es x^2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+5}{3x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$$

6.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)\frac{(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)}{(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+x(a+b)+ab}+x}$$

Vemos que x es la variable de mayor exponente, por tanto dividimos el numerador y el denominador para x

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}+1} = \frac{a+b+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{a+b}{2}$$

Ejercicios propuestos:

1.- Pruebe que $\lim\limits_{y\to4^-} \dfrac{y}{y+4} = +\infty$

2.- Pruebe que $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x+2}{x^2-4} = +\infty$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x-2}{x+1}$

4.- Calcule $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

5.- Calcular las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-6}$

6.- Pruebe que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

7.- Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{-8x^3+x+2}$

8.- Calcule $\lim\limits_{t\to -\infty} (\sqrt{t^2+2t} - t)$

9.- Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$

10.- Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2+4x+7} - \sqrt[3]{x^3+2x^2-30})$

Sugerencia: En este caso como el numerador es un grado mayor que el denominador sume y reste x

1.4. Continuidad de una función en un número

Definición: Función continua en un número
Se dice que una función f es continua en $c \in \mathbb{R}$ si y solo si:

i) $f(c)$ *existe*

ii) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *,existe*

iii) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Observación:
Una función f es continua en $[a,b]$ si es continua para todo $x \in [a,b]$

Definición: Definición formal de continuidad
Sea $x_0 \in Dom(f)$ y $f(x_0) = L$, se dice que f es continua en x_0 si:

$$\boxed{\forall\epsilon > 0\ ,\exists\delta > 0\ tal\ que\ si\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Teorema:
Si f y g son dos funciones continuas en $c \in \mathbb{R}$, entonces:
i) $f \pm g$ es continua en c
ii) $f \cdot g$ es continua en c
iii) $\dfrac{f}{g}$ es continua en c ,siempre que $g(c) \neq 0$

Teorema:
Toda función polinomial es continua en todo número

Demostración:
Sea $p(x)$ un polinomio donde

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\ , a_0 \neq 0\ , n \in \mathbb{Z}\ , (a_0, \ldots , a_n) \in \mathbb{R}$$

luego, $\lim\limits_{x\to c} p(x) = a_0c_n + \cdots + a_{n-1}c + a_n$,que son suma de funciones continuas y por i) del teorema $p(x)$ es continua.

Teorema:
Una función racional es continua en todo número de su dominio

Demostración:
Sea f una función racional,ésta se la puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales, $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$,donde g y h son funciones polinomiales y $h(x) \neq 0$,como g y h son funciones polinomiales, son continuas en su dominio y por tanto:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(c)}{h(c)} = f(c)$$

y por iii) del teorema, f es continua en $c \in Dom(f)$

Teorema:
Si n es un número entero positivo y $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces:
i) Si n es impar, entonces f es continua en todo número
ii) Si n es par, entonces f es continua en todo número positivo

Ejemplos:

1.- Sea $f(x) = \begin{cases} 2x+3; & x \leq 1 \\ 8-3x; & 1 < x < 3 \\ x+3; & x \geq 3 \end{cases}$ Analizar la continuidad en $x = 1$ y $x = 3$

Solución:

Vemos que $f(1) = 5$ y $f(3) = 6$, es decir existen, ahora debemos ver si existen los límites en 1 y 3, y si existen deben ser iguales a 5 y 6 respectivamente.
Para $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 8 - 3x = 5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 3 = 5$$

Como los límites laterales coinciden y son iguales a 5, f es continua en $x = 1$

Para $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} 8 - 3x = -1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite en $x = 3$ no existe por tanto f no es continua en $x = 3$

2.- Sea $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$, analizar en qué intervalo es continua esta función.

Solución:

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \frac{1}{x+4}$$

Vemos que no existen $g(1)$ y $g(-4)$ entonces g no es continua en $x = 2$ y $x = -4$,sin embargo en cualquier otro número $x \neq 2 \neq -4$ está definido $g(x)$ y además existe su límite y coincide con $g(x)$,por tanto g es continua en $(-\infty, -4)\text{U}(2, +\infty)$

3.- Sea $f(x) = \begin{cases} x;\ x \leq 1 \\ cx + k;\ 1 < x < 4 \\ -2x;\ x \geq 4 \end{cases}$, determine las constantes c y k que hagan a la función continua en $\mathbb{R}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (cx + k) = c + k$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \Rightarrow c + k = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4} -2x = -8$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} (cx + k) = 4c + k \Rightarrow 4c + k = -8 \quad (2)$$

De (1) y (2) se tiene lo siguiente:

$\begin{cases} c + k = 1 \\ 4c + k = -8 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3c = -9 \Rightarrow c = -3, k = 4$$

Es decir, f es continua en $\mathbb{R}$ si $c = -3$ y $k = 4$

4.- Se dice que una función f tiene una **discontinuidad removible en** $c \in \mathbb{R}$ si existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ pero no es igual a $f(c)$

Demuestre que la función definida por $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ con $n \in \mathbb{Z}$, tiene una discontinuidad removible en $x = 1$

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^{n-1} + \ldots + 1)}{(x-1)} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n-veces} = n - 1$$

$f(1)$ no está definida, sin embargo existe el límite en $x = 1$, esto prueba que la función tiene una discontinuidad removible en $x = 1$. Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ la función redefinida sería:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, \ x \neq 1 \\ n - 1, \ x = 1 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos:

1.- Analizar en qué intervalo es continua la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

2.- Analizar la continuidad de $G(t) = \begin{cases} t^2 - 4; \ t < 2 \\ 4; \ t = 2 \\ 4 - t^2; \ t > 2 \end{cases}$

3.- Analizar la continuidad de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

4.- Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}; \ x \neq 1 \\ 3; \ x = 1 \end{cases}$

5.- Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{2}; \ x < 0 \\ 2; \ x = 0 \end{cases}$

6.- Determinar los valores de las constantes c y k que hagan que la función

$f(x) = \begin{cases} kx-1; \ x \leq 2 \\ kx^2; \ x > 2 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$

7.- Determinar los valores de las constantes c y k que hagan que la función

$g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{3}c; \ x < -2 \\ -3cx + k; \ -2 \leq x \leq 1 \\ 4x + \dfrac{1}{2}k; \ x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$

8.- Se dice que una función f tiene una **discontinuidad irremovible** en $c \in \mathbb{R}$ si:

i) Existen los límites laterales pero son distintos
ii) No existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ o si bien uno de sus límites laterales es $\pm\infty$ (puede suceder ambas).

Determine que tipo de discontinuidad tiene la función $f(x) = \begin{cases} 2x+3; \ x \leq 1 \\ 8-3x; \ 1 < x < 3 \\ x+3; \ x \geq 3 \end{cases}$
en $x = 1$ y $x = 3$; es decir si tiene discontinuidad removible o irremovible.

1.5. Continuidad de una función compuesta

Teorema: Límite de una función compuesta
Sea f una función continua en $a \in \mathbb{R}$ y g una función; si $\lim_{x \to c} g(x) = a$, entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to c} (f \circ g) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x))}$$

Demostración:

Puesto que f es continua a , $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ tal que si $|y - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(a)| < \epsilon$ (1)

Como $\lim_{x \to c} g(x) = a$, entonces $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - a| < \epsilon$ (2)

Sea $y = g(x)$, luego en (1) $|g(x) - a| < \delta_1$ pero por (2) $|g(x) - a| < \epsilon$ es decir $\delta_1 = \epsilon$, además también en (1): $|f(g(x)) - f(a)| < \epsilon$ (3)

juntando (2) y (3) y tomando $\delta = \delta_2$ obtenemos que:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \textit{tal que si} \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(a)| < \epsilon$$

Lo cual prueba el teorema.

Teorema: Continuidad de una función compuesta
Si la función g es continua en $c \in \mathbb{R}$ y la función f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en c.

Demostración:

Puesto que g es continua en c , entonces $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ $(*)$

Como f es continua en $g(c)$, entonces:

$$\lim_{x\to c}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to c}f(g(x))=f(\lim_{x\to c}g(x))=\underbrace{f(g(c))}_{por\ (*)}$$

Por lo cual $f\circ g$ es continua en c.
Con estos teoremas se puede demostrar algunas otras propiedades de límites:

Demostración del límite de dos cocientes:

Sea $\lim_{x\to c}f(x)=L$ y $\lim_{x\to c}g(x)=M\neq 0$, debemos probar que $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$

Sea h la función definida por $h(x)=\dfrac{1}{x}$ .Entonces al función compuesta $h\circ g$ está definida por $h(g(x))=\dfrac{1}{g(x)}$; h es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, y en consecuencia:

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to c}h(g(x))=h(\lim_{x\to c}g(x))=h(M)=\frac{1}{M}$$

Luego, del producto de límites se tiene que $\lim_{x\to c}\dfrac{(f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}f(x)\lim_{x\to c}\dfrac{1}{g(x)}=$ $L\cdot\dfrac{1}{M}$

$\Rightarrow\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$

Demostración del límite de la raíz n-ésima de una función para n par:

Sea $n\in\mathbb{Z}$ y $\lim_{x\to c}f(x)=L>0$, probemos que $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$

Sea h la función definida por $h(x)=\sqrt[n]{x}$ .Entonces la función compuesta $h\circ f$ está dada por $h(f(x))=\sqrt[n]{f(x)}$ como h es continua en L para n en este caso par:

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\lim_{x\to c}h(f(x))=h(\lim_{x\to c}f(x))=h(L)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Teorema del valor intermedio:
Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor $M \in (f(a), f(b))$ existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = M$

Teorema de Bolzano (Cero intermedio):
Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son distintos de cero y tienen signos opuestos, entonces $f(x)$ tiene algún cero en (a,b) es decir existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

Demostración:
La función f cumple la hipótesis del teorema del Valor intermedio y como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, tomemos $M = 0 \in (f(a), f(b))$, por tanto por el teorema del Valor intermedio existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

Ejemplos:

1.- Calcular $\lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen}(x^2+\pi)$

Solución:

Primero calculemos:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x^2+\pi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi$$

Como la función seno es continua en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi$ entonces:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen}(x^2+\pi) = \operatorname{sen}(\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x^2+\pi)) = \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi\right) \approx -0{,}624266$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+2}$

Solución:

Sea $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$, calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^2} + 2) = 0 + 2 = 2$$

Como la función raíz cuadrada es continua en 2, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} g(x)} = \sqrt{2}$$

3.- Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tiene como mínimo una solución

Solución:

Elijamos un intervalo que comprenda a 0,3 por ejemplo puesto que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$, entonces $0{,}3 \in [0, 1]$ además la función seno es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $\operatorname{sen}(0) \neq \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})$ por este análisis vemos que la función seno satisface las características del Teorema del Valor Intermedio, por tanto se concluye que para $M = 0{,}3$ existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\operatorname{sen}(c) = 0{,}3$

4.- Pruebe que $f(x) = \cos^2(x) - 2\operatorname{sen}(\frac{x}{4})$ tiene un cero en $(0, 2)$.

Solución:

Aplicaremos el teorema de Bolzano, por tanto notemos que $f(0) = 1 > 0$ y $f(2) \approx -0{,}787 < 0$ como $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, por el teorema de Bolzano se concluye que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$

Nota:

Existe un método muy efectivo para calcular una aproximación en la que se puede hallar el valor de c tal que $f(c) = 0$, se trata del **Método de bisección** y se la puede encontrar en cualquier otro libro de Cálculo.

5.- Pruebe que $\cos(x) = x$ tiene al menos una solución

Solución:

Consideremos $f(x) = x - \cos(x)$ y probemos que tiene al menos un cero, para ello debemos encontrar un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ sean no nulos y tengan signos opuestos, por ejemplo tomemos el intervalo $[0, 1]$ así, $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) \approx 0{,}46 > 0$ como $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos y además la función f es continua en $[0, 1]$ por el teorema de Bolzano existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = c - \cos(c) = 0 \Leftrightarrow \cos(c) = c$
De aquí, vemos también que $\cos(x) = x$ tiene solución para algún $c \in (0, 1)$

Ejercicios:

1.- Calcule $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen}(\frac{x}{4} - \pi)$

2.- Calcule $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} 3^{-\operatorname{sen} x}$

3.- Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \tan(e^{x-1})$

4.- Probar que $f(t) = \tan(\frac{1}{t^2})$ es continua en su dominio

5.- Estudiar la continuidad de $f(x) = \tan(\operatorname{sen}(x))$

6.- Se define la función **Dientes de sierra** como $f(x) = x - [[x]]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ¿En qué puntos f es discontinua?, en esos puntos ¿Es f continua por la derecha o por la izquierda?

7.- Pruebe que la función $f(x) = \begin{cases} x; & \textit{si } x \textit{ es racional} \\ -x; & \textit{si } x \textit{ es irracional} \end{cases}$ es continua únicamente en $x = 0$

8.- Probar que $\dfrac{x}{x+1} = 0{,}48$ tiene al menos una solución

9.- Probar que para $g(x) = x^n - \cos(x)$ existe al menos un valor de c tal que $g(c) = 0$

10.- Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $\cos(x) = x^n$ tiene al menos una solución
Sugerencia: Usar el ejercicio 9 y resolver el ejercicio de manera similar que en el ejemplo 5 usando el Teorema de Bolzano y del Valor Intermedio respectivamente

11.- Probar que $2^t = bt$ tiene una solución si $b > 2$

12.- ¿$x = \text{sen}(x) - \cos(x)$ tiene una solución?

13.- Demostrar que si la función f es continua en $c \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\lim_{t\to 0} f(c+t) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$$

14.-Demostrar que si $\lim_{x\to c} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$

1.6. Continuidad de las funciones trigonométricas

Teorema de estricción o del Sánduche:
Supongamos que para $x \neq c$ (en algún intervalo abierto que contenga a c), se verifica que:

$$l(x) \leq f(x) \leq u(x) \text{ y } \lim_{x \to c} l(x) = \lim_{x \to c} u(x) = L$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe y* $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_{x \to c} l(x) = \lim_{x \to c} u(x) = L$; existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |l(x) - L| < \epsilon \quad (1)$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |u(x) - L| < \epsilon \quad (2)$$

De (1) se tiene que $-\epsilon + L < l(x) < \epsilon + L$ pero como $f(x) \geq l(x)$ entonces $L - \epsilon < f(x)$ (3)
De forma similar en (2) puesto que $f(x) \leq u(x)$ entonces $f(x) < L + \epsilon$ (4)
Juntando (3) y (4) tenemos que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ luego tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \text{ tal que si } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Es decir $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Con el teorema de estricción se puede demostrar un límite muy importante:

Teorema:

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1 \text{ para } \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \theta \neq 0}$$

Demostración:

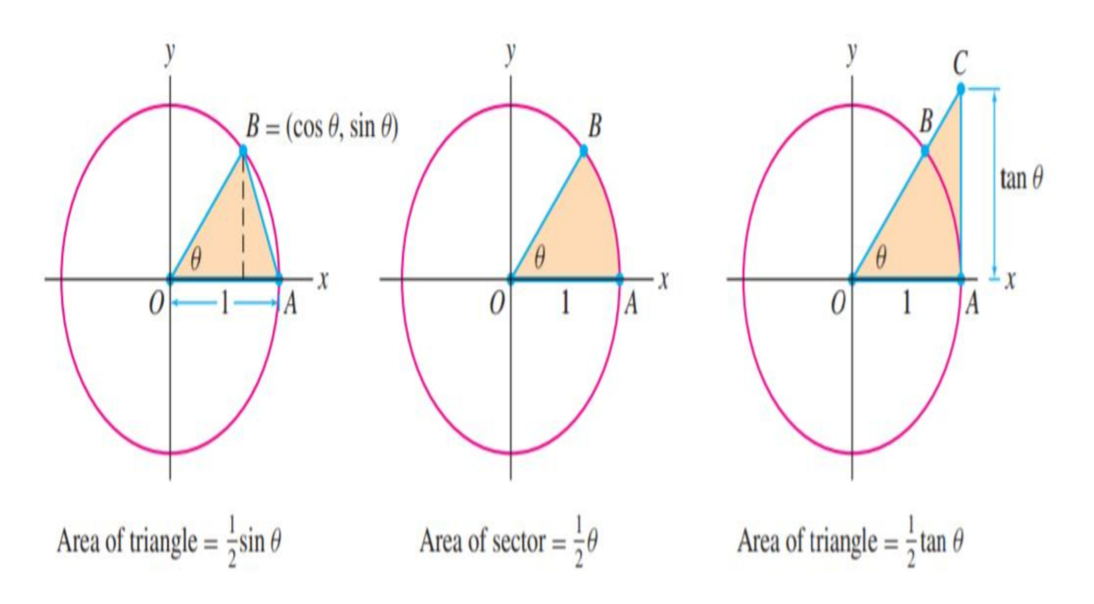


Figura 1.2: Interpretación de áreas

Supongamos en primer lugar que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ la demostración se va a realizar en relación a las figuras mostradas. Vemos que área figura 1<área figura 2<área figura 3 $(*)$

Calculando estas tres áreas, vemos que en la figura 1 la base de $\triangle OAB$ es 1 y su altura es $\operatorname{sen}\theta$, por lo que su área es igual a $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$. En la segunda figura por Geometría se sabe que el área del sector circular $\triangle BOA$ es $\dfrac{1}{2}\theta$.
Ahora, en la figura 3 para calcular el área de $\triangle OAC$, observemos que $\tan\theta = \dfrac{AC}{OA} = \dfrac{AC}{1} = AC$

Por tanto, como la base de $\triangle OAC$ es 1 y su altura es $\tan\theta$, su área se-

rá $\frac{1}{2}\tan\theta$. Por tanto de (*):

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Por la primera desigualdad como $\theta > 0$, se obtiene $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1$ (1)

En la segunda desigualdad multiplicamos por $\frac{2\cos\theta}{\theta}$ vemos que $\cos\theta \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ (2)

Juntando (1) y (2) tenemos que $\cos\theta \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1$ (3) , pero esta relación no cambia cuando θ se reemplaza por $-\theta$ ya que tanto $\cos\theta$ como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ son funciones pares, por tanto de esto concluimos que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Aplicando en (3) el teorema de estricción tenemos que $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0} 1 = 1$, por lo que hemos probado que $\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Teorema:

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0 \ ; \ \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}}$$

Demostración:

Vamos a usar (sin demostrar) la siguiente igualdad: $\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta}$

, luego:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\cdot\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\operatorname{sen}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0$$

Teorema:
Las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$

Demostración:

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$, por lo tanto se debe demostrar que si $c\in\mathbb{R}$ entonces:
$\lim_{x\to c}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}c$ y $\lim_{x\to c}\cos x=\cos c$ o equivalentemente por el ejercicio 13 de la sección 1.5 : $\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}(t+c)=\operatorname{sen}c$ y $\lim_{t\to 0}\cos(t+c)=\cos c$ luego:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}(t+c)&=\lim_{t\to 0}(\operatorname{sen}t\operatorname{sen}c+\cos t\cos c)\\&=\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}t\cdot\lim_{t\to 0}\cos c+\lim_{t\to 0}\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}c\\&=\operatorname{sen}c\quad(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\cos(t+c)&=\lim_{t\to 0}(\cos t\cos c-\operatorname{sen}t\operatorname{sen}c)\\&=\lim_{t\to 0}\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\cos c-\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}t\cdot\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}c\\&=\cos c\quad(2)\end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$

Teorema:
Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en sus dominios.

Observación:
El ejercicio 13 de la sección 1.5 y el Teorema de Estricción son muy útiles para calcular límites de funciones trigonométricas sobre todo cuando la variable no tiende a cero, como se verá en los ejemplos

Ejemplos:

1.- Calcular $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta + 3\operatorname{sen} 2\theta}{12\operatorname{sen} 3\theta - 7\theta}$

Solución:

Dividimos tanto el numerador como el denominador para θ Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta + 3\operatorname{sen} 2\theta}{12\operatorname{sen} 3\theta - 7} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 + \frac{3\operatorname{sen} 2\theta}{\theta}}{\frac{12\operatorname{sen} 3\theta}{\theta} - 7} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{1 + 3 \cdot 2\left(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta}\right)}{12 \cdot 3\left(\frac{\operatorname{sen} 3\theta}{3\theta}\right) - 7} \\
&= \frac{1 + 6\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta}}{36\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{3\theta} - 7} \\
&= \frac{1+6}{36-7} \\
&= \frac{7}{29}
\end{aligned}$$

2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{x^2}$

Solución:

Multiplicamos el numerador y denominador por $1-\cos x$, por lo que

$$\frac{1+\cos x}{x^2} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\underbrace{x^2(1-\cos x)}_{\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{0} = \infty$$

3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

Solución:

Sumamos y restamos 1 al numerador y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} &= \frac{-(1-\cos x)}{x^2} + \frac{(1-\cos 3x)}{x^2} \\
&= \frac{-(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} + \frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)} \\
&= \left(\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{9\operatorname{sen}^2 3x}{9x^2}\right) \frac{1}{1+\cos 3x}
\end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2} &= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)+9\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{9x^2}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos 3x}\right)\\
&= \frac{-1}{2}+\frac{9}{2}=4
\end{aligned}$$

4.- Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\pi-2x}$

Solución:

Como x no tiende a cero, aplicamos el ejercicio 13 de la seción 1.5, por tanto consideremos $t=x-\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow x=t+\frac{\pi}{2}$, ahora el ejercicio consiste en evaluar $\lim_{t\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})}{\pi-2(t+\frac{\pi}{2})}$ ahora obsevermos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})}{\pi-2(t+\frac{\pi}{2})} &= \frac{1-\operatorname{sen} t\cos\frac{\pi}{2}-\cos t\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{t}\\
&= \frac{1-\cos t}{t}\\
&= \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)}\\
&= \frac{t\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\cos t}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})}{\pi-2(t+\frac{\pi}{2})}\right) &= \lim_{t\to 0} t \lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2}{t^2}\right) \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos t}\right)\\
&= 0\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

5.- Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

Sea $x = t+\frac{\pi}{4}$, entonces el ejrcicio consiste en evaluar $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos(t+\frac{\pi}{4})-\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{4})}{\cos(2t+\frac{\pi}{2})}$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\frac{\pi}{4})-\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{4})}{\cos(2t+\frac{\pi}{2})} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{2\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} 2t}\\
&= \sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} 2t}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t\cos t}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

6.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x}$

Solución:

Veamos el siguiente gráfico:

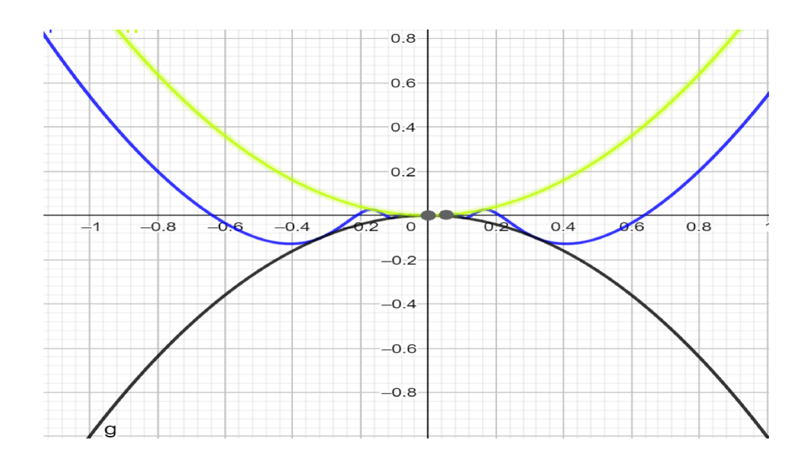


Figura 1.3: Gráfica de las funciones f, g y h

Consideremos $f(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$, $h(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$

Se sabe que $|\cos x| \leq 1$, entonces para $x \neq 0$, tenemos que $\left|\cos \dfrac{1}{x}\right| \leq 1$; multiplicando esta desigualdad por x^2 :

$$x^2 \left|\cos \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$$

Luego, notemos que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ por tanto por el teorema de estricción:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$$

7.- Calcular $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \cos\theta \cos(\tan\theta)$

Solución:

Consideremos $f(\theta) = \cos\theta \cos(\tan\theta)$, $g(\theta) = -|\cos\theta|$ y $h(\theta) = |\cos\theta|$ y observemos la figura:

Se sabe que $|\cos(\tan\theta)| \leq 1$, multiplicando esta desigualdad por $|\cos\theta|$

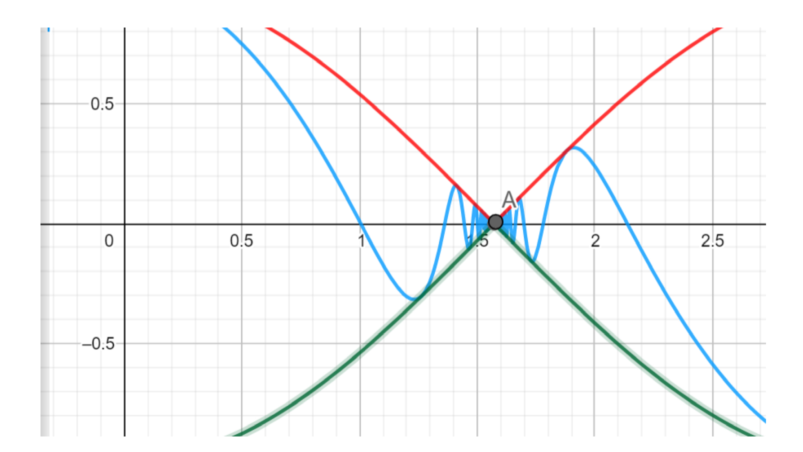


Figura 1.4: Gráficas de $f,\ g\ y\ h$

tenemos que $|\cos\theta||\cos(\tan\theta)| \leq |\cos\theta|$ y por propiedades del valor absoluto se tiene que:

$$-|\cos\theta| \leq \cos(\tan\theta) \leq |\cos\theta|$$

Por otra parte es claro que $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -|\cos\theta| = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} |\cos\theta| = 0$, así por el teorema de estricción:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos(\tan\theta) = 0$$

8.- Calcular $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{3t^2 - \operatorname{sen} 2t}{t^2+1}$

Solución:

Consideremos $f(t) = \dfrac{3t^2 - \operatorname{sen} 2t}{t^2+1}$, $g(t) = \dfrac{3t^2+1}{t^2+1}$ y $h(t) = \dfrac{3t^2-1}{t^2+1}$

Observemos que:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \operatorname{sen} 2t \leq 1 \\ -1 &\leq -\operatorname{sen} 2t \leq 1 \\ 3t^2 - 1 &\leq 3t^2 - \operatorname{sen} 2t \leq 3t^2 + 1 \end{aligned}$$

Además como t^2 siempre toma valores mayores que 1 (pues $t^2 \to +\infty$), entonces

$$\frac{3t^2-1}{t^2+1} \leq \frac{3t^2 - \operatorname{sen} 2t}{t^2+1} \leq \frac{3t^2+1}{t^2+1}$$

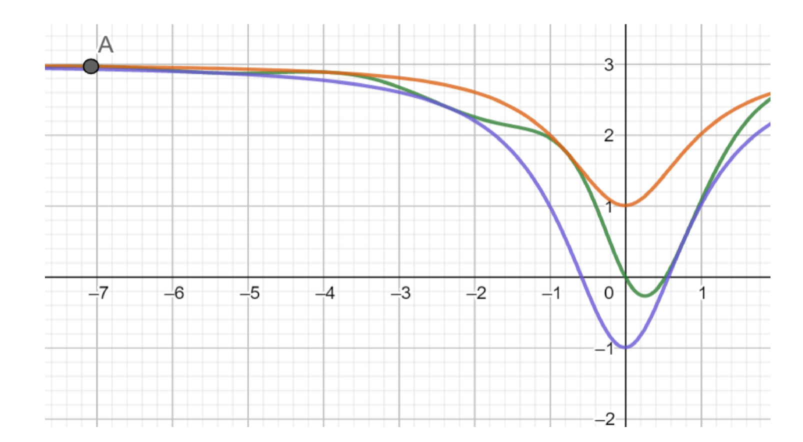


Figura 1.5: Gráficas de $f,\ g$ y h

y por otra parte $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{3t^2-1}{t^2+1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{3t^2+1}{t^2+1}=3$, por tanto por el teorema de estricción:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{3t^2-\operatorname{sen}2t}{t^2+1}=3$$

NOTA IMPORTANTE:

Como se ha visto hasta este capítulo, no se ha tratado límites de funciones exponenciales y logarítmicas, se tratará estas funciones más detalladamente en Cálculo Integral así como otro tipo de funciones.

Ejercicios:

1.- Pruebe que $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$

2.- Calcule $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin h}{\theta}$

3.- Calcule $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x}$

4.- Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4 - x^4\sin^2 x}}{1-\cos x}$

5.- Calcule $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 4t}{t\sec 2t}$

6.- Calcule $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}$

7.- Calcule $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan t - 1}{\dfrac{\pi}{4}}$

8.- Calcule $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-4\cos^2 x}{8\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

9.- Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

Sugerencia:Haga el cambio de variable $t = \dfrac{1}{x}$

10.- Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin \pi x}{2-3x}$

11.- Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$

Sugerencia: Ponga $\theta = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan\theta$ *Notando que* $\theta \to 0$ *cuando* $x \to 0$

12.- Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\; 4^{\cos\frac{\pi}{x}}$

13.- Calcule $\lim\limits_{t\to 0^-} \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) 3^{\frac{1}{t}}$

14.- Calcule $\lim\limits_{x\to 1} (2^t - 1)\sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)$

15.- Pruebe que la función secante es continua en su dominio

Capítulo 2

Derivación

2.1. Definición de la Derivada

Para definir la derivada se relaciona la recta tangente con la recta secante, la pendiente de la recta secante por dos puntos distintos $P = (a, f(a))$ y $Q = (x, f(x))$ de la gráfica de una función $f(x)$ es:

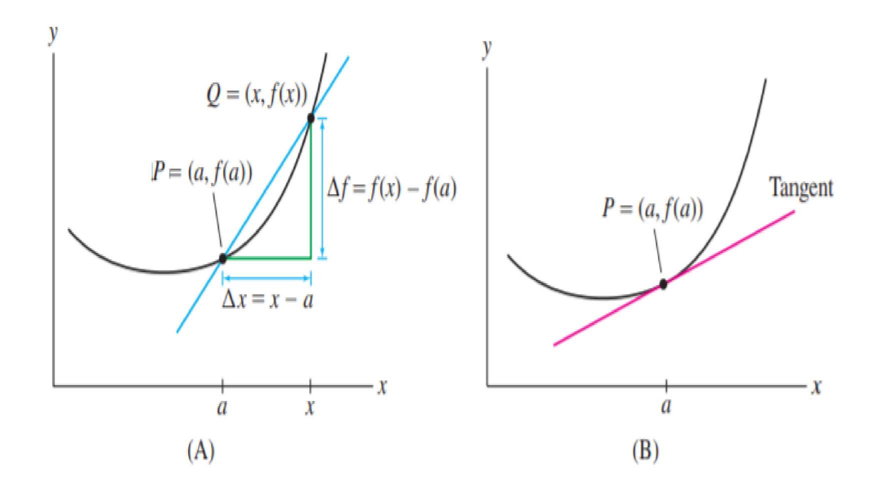


Figura 2.1: Interpretación de la derivada

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Donde $\Delta f = f(x) - f(a)$ y $\Delta x = x - a$

La expresión $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se denomina el **cociente incremental**

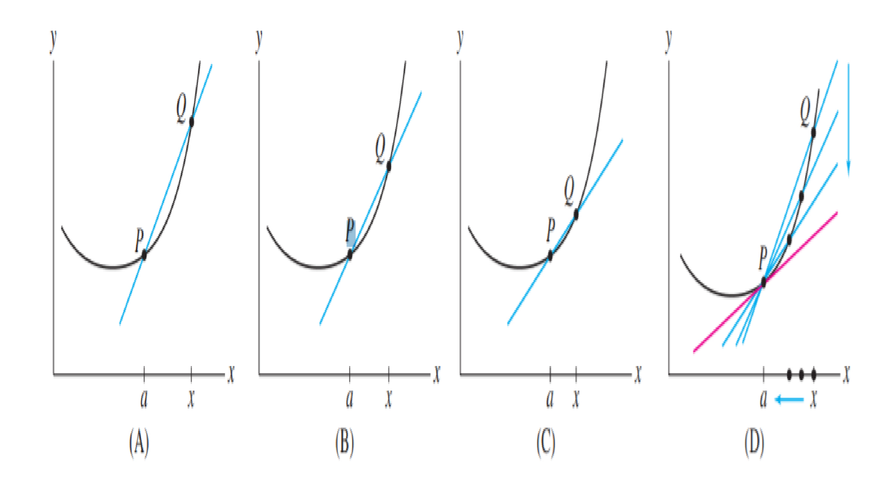


Figura 2.2: Aproximación de las rectas secantes a las rectas tangentes

Como vemos en el dibujo, Q se acerca a P conforme $x \to a$. Se observa que las rectas secantes se acercan cada vez más a la recta tangente, por tanto se espera que las pendientes de las rectas secantes se aproximen lo suficiente a la pendiente de la recta tangente.

Según esta idea, se define la derivada $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, esto vendría a ser el límite de las pendientes de las rectas secantes. Pero la derivada puede tener otra interpretación que de hecho suele ser de más utilidad.

Según lo obeservado en la figura 2.3 , sea h una nueva variable definida como $h = x - a$, se tiene entonces que $x = a + h$ y para $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Notemos que $h \to 0$ cuando $x \to a$ por lo que se puede reescribir la derivada como $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, en conclusión hemos obtenido las siguientes definciones:

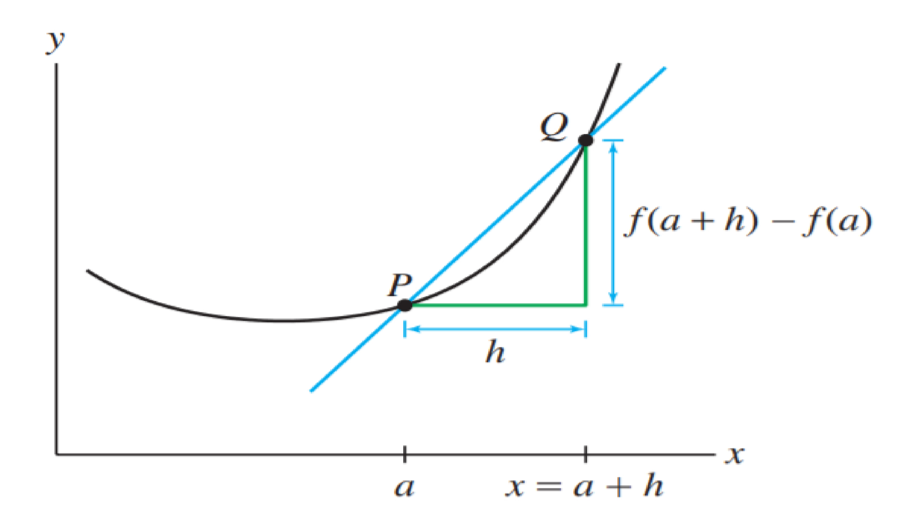


Figura 2.3: Otra interpretación de la derivada

Definición:
La derivada de $f(x)$ en $x = a$ es el límite (si existe) de los cocientes incrementales:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Observación:
Se sabe que la ecuación de la recta tangente m que pasa por $P = (a, b)$ en al forma punto-pendiente es $y - b = m(x - a)$, de manera similar se puede definir la recta tangente como la recta de pendiente $f'(a)$ que pasa por $P = (a, f(a))$ esto era de esperarse pues como se pudo notar la derivada es la pendiente de la recta tangente de una función f , es la razón de cambio instantánea que varía el valor de dicha función y es el límite de un cociente incremental.

Definición:
Supongamos que $f(x)$ es derivable en $x = a$. La recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $P = (a, f(a))$ es la recta que pasa por P de pendiente $f'(a)$.

La ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente es entonces:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Teorema: Derivada de una función lineal y constante
i) Si $f(x) = mx + b$ es una función lineal, entonces $f'(a) = m\ \forall a \in Dom(f)$
ii) Si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(a) = k\ \forall a \in Dom(f)$

Demostración:

i)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m(a+h) + b - (ma + b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{m} = m \end{aligned}$$

ii)
De i) basta notar que si $m = 0$, entonces $f(x) = k$ es constante y $f'(a) = 0$.

Observación:
Sea $f(x)$ una función de variable real, entonces:
1.- La derivada de f en $x = a$ por la derecha se denota como $f'(a^+)$ y se define por:

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2.- La derivada de f en $x = a$ por la izquierda se denota como $f'(a^-)$ y se define por:

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3.- Diremos que una función $f(x)$ es diferenciable en $x = a$ si sus derivadas laterales existen y son iguales.

Ejemplos:
1.- Obtenga la derivada de $f(t) = t - 2t^2$

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t + h - 2(t+h)^2 - t + 2t^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\,h(4t + 2h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} (-4t - 2h + 1) \\
&= -4t + 1
\end{aligned}
$$

2.- Obtenga la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $a = -2$

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{1}{x+3} - 1}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{\frac{-x-2}{x+3}}{x+2} = -1
\end{aligned}
$$

3.- ¿ Es la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ ;\ x \leq 4 \\ 2(x-8)\ ;\ x > 4 \end{cases}$ diferenciable en $a = 4$?

Solución:
Calculemos las derivadas laterales:

$$
\begin{aligned}
f'(4^+) &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)\,(\sqrt{x} + 2)}{(x-4)\,(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(4^-) &= \lim_{x\to 4} \frac{2x - 16 - 2(4-8)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Como las derivadas laterales no coinciden, $f(x)$ no es difereciable en $a = 4$

Ejercicios propuestos:

1.- En los ejercicios a), b) y c) obtenga la derivada:

a) $f(t) = 2t - t^3$
b) $f(t) = \sqrt{t^2+4}\ \left(t - \frac{1}{2}\right)$
c) $f(x) = x + x^{-1}$

2.- En los ejercicios a), b) y c) obtenga la derivada en el punto que se indica:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$, $a = -1$
b) $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$, $a = 4$
c) $f(x) = \sin x$, $a = 0$

3.- En los ejercicios a), b), c) ,d) y e). Verifique si las funciones son o no diferenciables en el punto a.

a) $f(t) = |t|$, $a = 0$

b) $f(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t} & ,t < 1 \\ (1-t)^2 & ,t \geq 1 \end{cases}$, $a = 1$

c) $f(t) = |t^2 - 4|$, $a = 2, a = -2$

d) $f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & ,t < 2 \\ \sqrt{t-2} & ,t \geq 1 \end{cases}$, $a = 2$

e) $f(t) = \begin{cases} t^2 & ,t < -1 \\ -1 - 2t & ,t \geq -1 \end{cases}$, $a = -1$

2.2. La Derivada como una función

Definición: Función derivable
Se dice que una función $f(x)$ es derivable en (a, b) si $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $f'(x)$ existe para todo x en el intervalo o intervalos en los que f(x) está definida, se dice que $f(x)$ es derivable.

Notación de Leibniz:
Existe otra notación muy importante para la derivada que la estableció Gottfried Leibniz se nota: $\dfrac{df}{dx}$ o $\dfrac{dy}{dx}$, por ejemplo para $f(x) = x^2$ la derivada sería $\dfrac{df}{dx} = 2x$.
Para espicifar el valor de la derivada en un valor concreto de x por ejemplo en $x = 2$, se escribe: $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=2}$ o $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$

Observación:
Las expresiones dy y dx se denominan $diferenciales$ y desempeñan un papel muy importante en cálculo avanzado, análisis matemático y ecuaciones diferenciales.

Teorema: Regla de la potencia
Para cualquier exponente $n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

Demostración:
Se demostrará el teorema para $n \in \mathbb{N}$. Sea $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$, por el teorema del binomio:
$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$, luego:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\ &= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{\text{se suma n veces}} \end{aligned}$$

Por tanto: $f'(a) = na^{n-1}$

Teorema:Reglas de linealidad
Suponga que f y g son derivables. Entonces:
Regla de la suma y la diferencia:
$f \pm g$ es derivable y

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$$

Regla del múltiplo constante:
Para cualquier $k \in \mathbb{R}$, kf es derivable y

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Demostración: (para la suma)

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra para la diferencia y el múltiplo constante.

Teorema:
Toda función f derivable en $c \in \mathbb{R}$ es continua en c

Demostración:
Por definición, si f es derivable en $x = c$, entonces el siguiente límite existe:
$f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$
Se debe demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Notemos que para todo $x \neq c$

$f(x) - f(c) = (x - c)\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \left((x - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \\
&= \left(\lim_{x \to c} (x - c) \right) \left(\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \\
&= 0 \cdot f'(c) = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Notemos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (f(x) - f(c)) + \lim\limits_{x \to c} f(c)$, pero por $(*)$ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0 + f(c) = f(c)$ y así queda probado que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Ejemplos:
1.- Derivar usando la regla de la potencia $f(x) = 5x - 32x^{1/2}$

Solución:
$f'(x) = 5x^{1-1} - 32 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 5 - \dfrac{16}{\sqrt{x}}$

2.- Hallar la ecuación de la recta tangente para $f(x) = x^4$ en $a = 2$

Solución:
$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$
$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Rightarrow \quad y - 16 = 32(x - 2)$
$\Rightarrow \; y = 32x - 48$

3.- Hallar los puntos de la gráfica de $f(x) = 12 - x^3$ en los que la recta tangente sea horizontal.

Solución:
Para hallar la recta tangente horizontal, se iguala a cero la derivada, así: $f'(x) = -3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$.
Entonces la función tiene recta tangente horizontal en $x = 0$.

4.- Probar que $f(x) = |x^2 - 4|$ no es derivable en $x = 2$.

Solución:
Usando la definición de derivada:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left| x^2 - 4 \right|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} |h+4| \cdot \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

En la última igualdad, el factor $\frac{|h|}{h}$ oscila entre 1 y -1, entonces aplicando límites laterales:

$\lim_{h \to 0^-} |h+4| \cdot \frac{|h|}{h} = 4 \cdot -1 = -4$

$\lim_{h \to 0^+} |h+4| \cdot \frac{|h|}{h} = 4$

Vemos que los límites laterales no coinciden por tanto este límite no existe, es decir $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

5.- Sea $n \in \mathbb{N}$. Aplique la regla de la potencia a x^n para calcular la derivada de $f(x) = x^{-n}$.

Solución:

Sea $f(x) = x^{-n}$, como $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} \\ &= \frac{\frac{x^n - (x+h)^n}{x^n(x+h)^n}}{h} = \frac{-\left[(x+h)^n - x^n\right]}{x^n(x+h)^n h} \\ &= \frac{-1}{x^n(x+h)^n} \cdot \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \end{aligned}$$

Ahora, procedemos a evaluar el límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^n(x+h)^n} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

puesto que el límite del factor de la derecha es igual a nx^{n-1} , entonces
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^n(x+h)^n} \cdot nx^{n-1} = \frac{-1}{x^{2n}} \cdot nx^{n-1}$
$\Rightarrow f'(x) = -x^{-2n}x^{n-1}n = -nx^{-n-1}$.
Así, se ha probado que para $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = x^{-n}$, $f'(x) = -nx^{-n-1}$

6.- Hallar la derivada de $f(x) = [|x|] + [|-x|]$

Solución:

Recordemos que para la función parte entera $[|x|]$: para $n \in \mathbb{Z}^+$ $n \leq x < n+1$, por lo cual:
$f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$
$f(x) = n - (n+1) = -1$ si $x \notin \mathbb{Z}$
Podemos ver claramente que $f(x)$ es discontinua para $x \in \mathbb{Z}$, entonces aplicando el contrarecíproco al último teorema de esta sección (f no es continua en $x = c \Rightarrow f$ no es diferenciable en $x = c$) tenemos que f no es diferenciable para $x \in \mathbb{Z}$.
Por tanto f es diferenciable para todo $x \notin \mathbb{Z}$, luego $f(x) = -1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \;\; \forall x \notin \mathbb{Z}$

Ejercicios propuestos:

1.- Derive usando la regla de la potencia:
a) $f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 6)$
b) $f(x) = \dfrac{x^{-1/9} - x^{2/3}}{x^2}$
c) $f(x) = x^{n^3}$
d) $f(x) = x^5(x^3 - 1)$

2.- Halle los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 3x + 12$ en los que la pendiente de la recta tangente sea igual a 2.

3.- Halle los puntos de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 18$ en los que la recta tangente sea vertical.

4.- Calcular los valores de a, b y c para que la siguiente función:
$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{|x|}\ , \ |x| \geq 2 \\ ax^2 + bx + c\ , \ |x| < 2 \end{cases}$ sea continua en $x = -2$ y diferenciable en $x = 2$

5.- Pruebe que las rectas tangentes a $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ en $x = a$ y en $x = b$ son paralelas si $a = b$ ó $a + b = 2$

6.- Comprobar la regla de la potencia usando la definición pero esta vez para el exponente $1/n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.
Sugerencia: Reescriba el cociente incremental para $y = x^{1/n}$ *en* $x = b$. *En términos de* $u = (b + h)^{1/n}$ *y* $a = b^{1/n}$

7.- Probar la regla de linealidad para la diferencia y el múltiplo constante.

2.3. La regla del producto y del cociente

Teorema: Regla del producto
Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f\cdot g$ es diferenciable y se tiene:

$$\boxed{(fg)'(x) = f(x)g(x)' + g(x)f'(x)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x)g(x+h)-f(x)g(x)]+[f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= f(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}+\lim_{h\to 0}g(x+h)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Teorema: Regla del cociente
Si f y g son funciones derivables, entonces f/g es derivable para todo x tal que $g(x)\neq 0$ y se tiene:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

Demostración:

Sea $g(x)\neq 0$, entonces por la definición de derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)$$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h[g(x+h)g(x)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{h[g(x+h)g(x)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[g(x)f(x+h) - f(x)g(x)] - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{h[g(x+h)g(x)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h[g(x+h)g(x)]} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h[g(x+h)g(x)]}$$

$$= g(x) \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} -$$

$$f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x)}{g(x)^2} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplos:
1.- Derive $f(x) = (3x - 5)(2x^2 - 3)$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x-5)'(2x^2-3)+(3x-5)(2x^2-3)' \\ &= 3(2x^2-3)+(3x-5)4x = 6x^2-9+12x^2-20x \\ &= 18x^2-20x-9 \end{aligned}$$

2.- Derive $\sqrt{x}(1-x^3)$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x}'(1-x^3)+\sqrt{x}(1-x^3)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x^3)-3x^{5/2} \end{aligned}$$

3.- Derive $\dfrac{1}{1+x^{3/2}}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{1'(1+x^{3/2})-(1+x^{3/2})'}{(1+x^{3/2})^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-3x^{1/2}}{2}}{(1+x^{3/2})^2}$$

4.- Derive $\dfrac{x+4}{x^2+x+1}$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+4)'(x^2+x+1)-(x+4)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1-(2x+1)(x+4)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1-2x^2-9x-4}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2-8x-3}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

5.- Sea $f(x) = (x-a)[[x]]$, pruebe que $f'(a^-)+1 = f'(a^+)$

Solución:

La función $[[x]]$ la deinimos por: $[[x]] = \begin{cases} a-1 & ,a-1 \le x < a \\ a & ,a \le x < a+1 \end{cases}$

Por lo cual tenemos desarrollado que $f(x) = \begin{cases} (x-a)(a-1) & ,a-1 \le x < a \\ (x-a)a & ,a \le x < a+1 \end{cases}$

$f'(a^-) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(a-1)}{x-a} = a-1$

$\Rightarrow f'(a^-)+1 = a-1+1 = a$

$f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)a}{x-a} = a$

Por lo cual queda probado que $f'(a^-)+1 = f'(a^+)$

6.- **María Gaetana Agnesi** en 1748 en su libro sobre Cálculo, realizó una demostración muy ingeniosa sobre la regla del cociente. Supongamos que f, g y $h = \dfrac{f}{g}$ son funciones derivables en su dominio.

Se calcula la derivada de $hg = f$ usando la regla del producto y aislando h'. Realice la demostración usando este procedimiento.

Solución:

Sea $g(x) \neq 0$; se tiene que $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h(x)g(x) = f(x)$.

Luego derivando por la regla del producto:

$$(h(x)g(x))' = f'(x) \;\Leftrightarrow h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = f'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x)g(x) + \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} = f'(x) \quad \left(\text{pues } \; h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$h'(x) = \frac{\left(f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}\right)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\Rightarrow \; h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejercicios propuestos:

1.- Derive $f(x) = (3x^4 + 2x^6)(x - 2)$

2.- Derive $y(t) = (t - 8t^{-1})(t + t^{1/3})$

3.- Derive $f(x) = (x - a)^m(x + b)^n$

4.- Derive $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

5.- Derive $h(s) = \dfrac{s^{3/2} - 8}{s^4 + 16}$

6.- Derive $g(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

7.- Sean f, g, h funciones derivables en su dominio. Pruebe que:

$(fgh)' = f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x)$

8.- Sea $f(x) = (x + 1)[[x]]$ ¿Es continua en $x = 1$? , ¿Es derivable en $x = 1$? , Halle $f'(1^-)$ y $f'(1^+)$.

9.- Halle una ecuación de la recta tangente para $g(x) = \dfrac{(x^2 + 2)^2}{2x}$ en $x = 1$

10.- **Derivada de la recíproca:**

a) Use la definición de derivada para demostrar que: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{-\,f'(x)}{f^2(x)}$, donde $f(x) \neq 0$.

b) Demuestre la regla del cociente usando el literal a) y la regla del producto.

2.4. Derivadas de orden superior y de la función inversa

Las derivadas de orden superior se obtienen derivando sucesivamente una función $y = f(x)$. Si f' es derivable, entonces la **segunda derivada** que se denota f'' es la derivada de f' , en la notación de Leibniz se nota como $f''(x) = \dfrac{d}{dx}(f'(x))$
La segunda derivada es la tasa de cambio de $f'(x)$. El proceso de derivar se puede continuar siempre y cuando las derivadas existan. En general, la derivada de orden n, que se denota $f^{(n)}(x)$, es la derivada de la derivada de orden $(n-1)$.
En la notación de Leibniz se escribe:

$$\frac{df}{dx}\ ,\ \frac{d^2f}{dx^2}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{d^nf}{dx^n}$$

Teorema: Derivada de la funcón inversa

Supongamos que $f(x)$ es derivable e inyectiva con inversa $g(x) = f^{-1}(x)$. Si $b \in Dom\ g(x)$ y $f'(g(b)) \neq 0$, entonces $g'(b)$ existe y se verifica:

$$\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}}$$

Demostración:

Hay que probar que:
i) $g(x)$ es derivable si $f'(g(x)) \neq 0$
ii) $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

Demostración i):

Supongamos que $f(x)$ es creciente (el caso decreciente es similar). Se va a demostrar que $g(x)$ es continua en $x = b$.
Sea $a = g(b)$, tal que $f(a) = b$. Sea $\epsilon > 0$, como $f(x)$ es una función creciente, esto aplica el intervalo abierto $(a - \epsilon\ ,\ a + \epsilon)$ en el intervalo abierto $(f(a - \epsilon),\ (a + \epsilon))$ (es decir $f(a - \epsilon) \leq f(a + \epsilon)$).

Como f es creciente el segundo intervalo contiene a $f(a) = b$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $(b - \delta\ ,\ b + \delta)$ está contenido en $(f(a - \epsilon\ ,\ f(a + \epsilon))$. Entonces $g(x)$ aplica de vuelta $(b - \delta\ ,\ b + \delta)$ en $(a - \epsilon\ ,\ a + \epsilon)$ (recordar que si una función es continua y creciente en un intervalo $[a, b]$, su inversa es continua y creciente en $[A, B]$, donde $A = f(a)$ y $B = f(b)$)

De aquí se deduce que $|g(y) - g(b)| < \epsilon$ si $0 < |y - b| < \delta$ donde $y = f(x)$. Esto prueba que g es continua en $x = b$.
Para terminar, se debe probar que existe el límite $g'(b) = \lim_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}$ y es igual a $\dfrac{1}{f'(g(b))}$. El límite existe pues g es continua en $x = b$ y por la relación inversa, si $y = f(x) \ \Rightarrow g(y) = x$ y como $g(y)$ es continua, $x \to a$ cuando $y \to b$.

Por tanto, como $f(x)$ es derivable y $f'(a) \neq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} &= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}\end{aligned}$$

Demostración ii):

Se deja como ejercicio en la sección 2.6 (se debe usar la regla de la cade-

na que se verá más adelante).

Ejemplos:

1.- Calcule y'' e y''' de $y = \dfrac{1}{1-x}$

Solución:

$y'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y''(x) = \dfrac{-(1-2x+x^2)'}{(1-x)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

$\Rightarrow y'''(x) = \dfrac{-2(1-x)^{3\prime}}{(1-x)^6} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$

2.- Halle una fórmula general para $f^{(n)}(x)$, donde $f(x) = x^{-3/2}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-3}{2}x^{-5/2} = (-1)\frac{3\cdot 1}{2}x^{-5/2}$$

$$f''(x) = \frac{15}{2}x^{-7/2} = (-1)^2\frac{5\cdot 3}{2^2}x^{-7/2}$$

$$f'''(x) = \frac{105}{2}x^{-9/2} = (-1)^3\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2^n}x^{\frac{-3}{2}-n}$$

3.- Halle una fórmula general para $f^{(n)}(x)$, donde $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1} + x^{-2} \\
f'(x) &= -x^{-2} - 2x^{-3} \\
f''(x) &= 2x^{-3} + 6x^{-4} \\
f'''(x) &= -6x^{-4} - 24x^{-5} \\
f^{(4)}(x) &= 24x^{-5} + 120x^{-6} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n(n!\ x^{-(n+1)} + (n+1)!\ x^{-(n+2)})
\end{aligned}$$

4.- Sea $f(x) = 7x + 6$ calcule $g'(x)$ donde $g(x)$ es la inversa de $f(x)$

Solución:

$$y = 7x + 6 \ \Rightarrow y - 6 = 7x \ \Rightarrow x = \frac{y-6}{7} \ \Rightarrow g(x) = \frac{x-6}{7}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'\left(\dfrac{x-6}{7}\right)} = \frac{1}{7}$$

5.- Sea $f(x) = 4x^3 - 1$, halle $g'(x)$

Solución:

$$y = 4x^3 - 1 \ \Rightarrow \frac{y+1}{4} = x^3 \ \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{4}}$$

$$\Rightarrow g(x) = \Big(\frac{x+1}{3}\Big)^{1/3}$$

$$f'(x) = 12x^2 \ \Rightarrow f'(g(x)) = 12\Big(\frac{x+1}{4}\Big)^{2/3} \ \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{12}\Big(\frac{x+1}{4}\Big)^{-2/3}$$

6.- Usando la regla del producto hallar $(fg)'''$ y compararlo con el desarrollo

de $(a+b)^3$

Solución:

Se sabe que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, desarrollando $(fg)'''$, tenemos:

$$\begin{aligned}(fg)''' &= (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' \\ &= f'''g + f''g' + 2(f''g' + f'g'') + f'g'' + fg''' \\ &= f''' + 3f''g' + 3f'g'' + g'''\end{aligned}$$

Vemos que hay una expresión bastante similar entre ambos desarrollos, en este caso los exponentes del desarrollo $(a+b)^3$ vendrían a ser el orden de la derivada para el desarrollo de $(fg)'''$

Ejercicios propuestos:

1.- Calcule y'' e y''' para $y = (x^{1/2} + x)(1-x)$

2.- Sea $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$, calcule $f'''(1)$ y $f^{(5)}(1)$

3.- Halle $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = (x+2)^{-1}$

4.- Halle $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$

5.- Halle $f^{(n)}(t)$ si $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$

6.- Halle una ecuación de la recta tangente para $y = f'(x)$ en $x = 3$ si $f(x) = x^4$

7.- Sea $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ calcule $g'(x)$ donde $g(x)$ es la inversa de $f(x)$

8.- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ calcule $g'(x)$ donde $g(x)$ es la inversa de $f(x)$

9.- Sea g la inversa de una función f tal que $f'(x) = f(x)$. Pruebe que $g'(x) = x^{-1}$

10.- Demuestre por inducción que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$
y como en el ejemplo 6) compare este resultado con el desarrollo de $(a+b)^n$

2.5. Derivadas de funciones trigonométricas

Teorema: Derivada del seno y del coseno

Las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$ son derivables y sus derivadas son:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x} \text{ y } \boxed{\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x}$$

Demostración:

Se demostrará para $y = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\
&= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Las derivadas de otras funciones trigonométricas estándar se pueden calcular aplicando la regla del cociente.

Teorema: Derivadas de las funciones trigonométricas estándar

$$\boxed{(\tan x)' = \sec^2 x} \qquad \boxed{(\sec x)' = \sec x \tan x}$$

$$\boxed{(\cot x)' = -\csc^2 x} \qquad \boxed{(\csc x)' = -\csc x \cot x}$$

Ejemplos:

1.- Comprobar la fórmula $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

Solución:

$$\begin{aligned}(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{\sin x' \cos x - \cos x' \sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

2.- Derive $f(x) = \tan x \sec x$

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \tan x' \sec x + \tan x \sec x'\\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x\end{aligned}$$

3.- Derive $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(\sin x + 1)'(\sin x - 1) - (\sin x - 1)'(\sin x + 1)}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{\cos x \sin x - \cos x - \sin x \cos x - \cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$= \frac{-2\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

4.- Derive $f(x) = x \sin x$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \sin x' + x' \sin x \\ &= x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

5.- Halle $y^{(157)}$, donde $y = \sin x$

Solución:

$y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin(x)$, $y^{(5)} = \cos x$, $y^{(6)} = -\sin x$

si n es par:

$$\begin{cases} y^{(n)} = \sin x \ ; \ \text{si } n \text{ es múltiplo de } 4 \\ y^{(n)} = -\sin x \ ; \ \text{si } n \text{ no es múltiplo de } 4 \end{cases}$$

si n es impar:

$$\begin{cases} y^{(n)} = \cos x \ ; \ \text{si } (n+3) \text{ es múltiplo de } 4 \\ y^{(n)} = -\cos x \ ; \ \text{si } (n+3) \text{ no es múltiplo de } 4 \end{cases}$$

157 es impar, luego 157+3=160 es múltiplo de 4, por tanto:
$y^{(157)} = \cos x$

6.- Obtenga la derivada de $\arcsin x$

Solución:

Vamos a usar la derivada de la función inversa: Sea $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \arcsin x$, vamos a evaluar $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

$f'(x) = \cos x$, $f'(g(x)) = \cos(\arcsin x)$

Puesto que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, entonces:

$f'(g(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Ejercicios propuestos:

1.- Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

2.- Compruebe que $(\sec x)' = \sec x \tan x$

3.- Derive $f(\theta) = \dfrac{\theta}{\sin\theta + 2}$

4.- Derive $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{x}$

5.- Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$

6.- Derive $\dfrac{(x^2+1)\cot x}{x^2-\cot x\sec x}$

7.- Hallar una ecuación de la recta tangente para $y = x^3\cos x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$

8.- Hallar una ecuación de la recta tangente para $y = 1 + \dfrac{x^2}{\sin x}$ en $x = 1$

9.- Halle $y^{(208)}$ donde $y = \cos x$

10.- Probar mediante la definición de derivada que $(\tan x)' = \sec^2 x$, recuerde que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\tan h}{h} = 1$

11.- Compruebe que $(\cot x)' = -\csc^2 x$

12.- Obtenga la derivada de $\arccos x$

13.- Obtenga la derivada de $\arctan x$

14.- Obtenga $f^{(5)}$ de $f(x) = x\sin x$, implemente una fórmula general para $f^{(n)}$

2.6. La Regla de la Cadena

Teorema: La regla de la cadena

Si f y g son derivables, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable y se verifica que:

$$\boxed{(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)}$$

Demostración:
Tenemos que para $h \neq 0$:

$$(f(g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Expresamos el cociente incremental como:

$$(f(g(x))' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (*)$$

Este paso es válido solo si el denominador $g(x+h) - g(x) \neq 0$. Por tanto para continuar la demostración se debe suponer cierta la condición adicional de que este factor es distinto de cero.
Aunque esta condición no es estrictamente necesaria sin ella la demostración resulta más compleja, por ello bajo esta suposición, $(*)$ resulta cierto y luego, de $(*)$ el límite de la derecha es $g'(x)$, debemos probar que el límite de la izquierda es $f'(g(x))$, para ello sea $k = g(x+h) - g(x)$, entonces $g(x+h) = g(x) + k$ y por tanto:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k}$$

La función $f(x)$ es continua porque es derivable. Así, $g(x+h)$ tiende a $g(x)$ y $k = g(x+h) - g(x)$ tiende a cero cuando $h \to 0$.
Por tanto se puede reescribir el límite en términos de k para obtener:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \quad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}$$

$$=f'(g(x)) \quad (2)$$

Finalmente, juntando (1) y (2) con $(*)$ tenemos que:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

Observación:

i) Como se dijo antes, este paso es legítimo si el denominador $g(x+h)-g(x)\neq 0$, esta suposición no es necesaria, existen varias formas de demostrar la regla de la cadena sin la necesidad de suponer esta condición, se propone una de ellas en los ejercicios.

ii) En la notación de Leibniz la regla de la cadena sería:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx}$, donde $y=f(u)$ y $u=g(x)$.

Ejemplos:

1.- Derivar $f(x)=\dfrac{\csc x^2}{\csc x^2-1}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{(\csc x^2)'(\csc x^2-1)-(\csc x^2-1)'(\csc x^2)}{(\csc x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-2x\csc x^2\cot x^2(\csc x^2-1)+2x\csc x^2\cot x^2(\csc x^2)}{(\csc x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x\csc x^2\cot x^2}{(\csc x^2-1)^2}$$

2.- Derivar $y = \sin\sqrt{x^2+2x+9}$

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \sin'(\sqrt{x^2+2x+9})(\sqrt{x^2+2x+9}) \\ &= \cos(\sqrt{x^2+2x+9})\frac{(x^2+2x+9)'}{2\sqrt{x^2+2x+9}} \\ &= \cos(\sqrt{x^2+2x+9})\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}} \end{aligned}$$

3.- Probar que si f, g y h son derivables, entonces:

$$[f(g(h(x))]' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

Solución:

Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} [f(g(h(x))]' &= f'(g(h(x)))(g(h(x))' \\ &= f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \end{aligned}$$

4.- Derivar $f(x) = \sin(\cos(\sin x))$

Solución:

Sea $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$ entonces $f(x) = g(h(g(x))$, luego usando el ejercicio 3:

$$f'(x) = \sin'(\cos(\sin x))\cos'(\sin x)(\sin x)' = -\cos(\cos(\sin x))\sin(\sin x)\cos x$$

5.- Derivar $y = (9-(5-2x^4)^7)^3$

Solución:

Sea $f(x) = x^3$, $g(x) = 9 - x^7$ y $h(x) = 5 - 2x^4$, luego $y = f(g(h(x)))$ y aplicando el ejercicio 3:

$$\begin{aligned} y' &= 3(9 - (5 - 2x^4)^7)^2 \cdot -7(5 - 2x^4)^6 \cdot (-8x^3) \\ &= -168(9 - (5 - 2x^4)^7)^2(5 - 2x^4)^6 x^3 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

En los ejercicios 1-10, derivar usando las técnicas de derivación aprendidas.

1.- $f(x) = \csc^3(x^2 + 2)$

2.- $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

3.- $f(t) = \tan\left(\dfrac{t^2 - 1}{t^4 + 1}\right)^{1/3}$

4.- $f(x) = x^4\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{4}}$

5.- $y = \sin^3(x^2 + 1)$

6.- $f(t) = \left(\dfrac{t^2 + t - 14}{t + \dfrac{1}{2}}\right)^{-4}$

7.- $f(\theta) = \cos(\tan(\theta + \sin\theta))$

8.- $y = \arcsin\left(\dfrac{x^2 + 6}{x - 2}\right)$

9.- $y = \sec(1 + (x + 4)^{-3/2})$

10.- $f(x) = \tan^4\left(2 + \dfrac{(1 - x)\sqrt{2x^2 + 5}}{x^3 + \sin x}\right)$

11.- Sea $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \ , \ x \neq 0 \\ 0 \ , \ x = 0 \end{cases}$

a) Probar que f es continua en $x = 0$
b) Usar la definición de derivada para probar que $f'(0)$ no existe.
c) Encontrar $f'(x)$ para $x \neq 0$
d) Determinar si $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ existe

12.- Usando la regla de la cadena demuestre que si una función f es derivable y es par entonces su derivada es impar, de igual manera si es impar entonces su derivada es par

13.- Nuevamente se probará la regla de la potencia pero esta vez para exponentes fraccionarios. Sea $f(u) = u^q$ y $g(x) = x^{p/q}$. Supongamos que $g(x)$ es derivable.
a) Pruebe que $f(g(x)) = x^p$
b) Usando la regla de la potencia para los naturales y la regla de la cadena demuestre que $f'(g(x))g'(x) = px^{p-1}$
c) A continuación, deducir la regla de la potencia para $x^{p/q}$

14.- **Demostración Completa de la regla de la cadena**
En este ejercicio se va a ver una de las maneras de demostrar la regla de la cadena sin la hipótesis adicional de que $g(x + h) - g(x) \neq 0$.
Para todo número $b \in \mathbb{R}$, vamos a definir la función:

$$F(u) := \frac{f(u) - f(b)}{u - b} \ , \ \forall u \neq b$$

a) Pruebe que si se define $F(b) = f'(b)$, entonces $F(u)$ es continua en $u = b$

b) Sea $b = g(a)$. Pruebe que si $x \neq a$, entonces para todo $u \neq b$ se tiene:

$$\frac{f(u) - f(g(a))}{x - a} = F(u)\frac{u - g(a)}{x - a} \quad (*)$$

Observe que ambas expresiones son cero si $u = g(a)$

c) Sustituya $u = g(x)$ en la ecuación $(*)$ con el resultado de

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = F(g(x))\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

A continuación, deduzca la regla de la cadena pasando el límite en ambos lados cuando $x \to a$

15.- Demostrar la parte b) de la derivada de una función inversa.

2.7. Derivación implícita

Hasta ahora se han desarrollado técnicas básicas para calcular una deivada $\frac{dy}{dx}$ cuando y viene dada en términos de de x. Pero supongamos que que y está determinada por una ecuación como $y^4 + xy = x^3 - x + 2$, en este caso se dice que y está definida **implícitamente**.
En este caso para poder hallar la pendiente de una recta tangente de este tipo de ecuaciones se procede a la derivación implícita. Por ejemplo, sea la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, calculemos $\frac{dy}{dx}$ derivando a ambos lados de la ecucaión:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \quad (1)$$

¿Cómo se va considerar $\dfrac{d}{dx}(y^2)$?
Se usará la regla de la cadena usando la notación de Leibniz, sea $y = f(x)$ entonces $y^2 = f(x)^2$ y por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}f(x)^2$$

$$= 2f(x)\frac{df}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Luego la ecuación (1) resulta $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ y para $y \neq 0$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y}$

Pasos para la derivación implícita:

i) Derive a ambos lados de la ecuación, respecto a x.
ii) Despeje $\dfrac{dy}{dx}$ agrupando todos los términos que involucren $\dfrac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo y el resto en el lado derecho de la ecuación.

iii) Recuerde incluir el factor $\dfrac{dy}{dx}$ cuando derive expresiones que involucren y respecto a x.

Observación:

1) Las reglas de derivación anteriores funcionan también para derivación implícita.
ii) También se puede tener el caso en que se calcule $\dfrac{dx}{dy}$, en este caso se pensará en x como una función implícita de y es decir $x = g(y)$ y se repetirá de manera análoga los pasos anteriores.

Ejemplos:

1.- Halle la ecuación de la recta tangente al punto $P = (1, 1)$ de la curva $y^4 + xy = x^3 - x + 2$ y graficarlo

$$\frac{d}{dx}(y^4) + \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(x^3 - x + 2)$$
$$4y^3\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$
$$(x + 4y^3)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1 - y}{x + 4y^3}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{5}$$

$P = (P_x, P_y) = (1, 1)$

Ec.recta tangente: $y - P_y = \frac{dy}{dx}(x - P_x)$

Ec.recta tangente: y$=\frac{x+4}{5}$

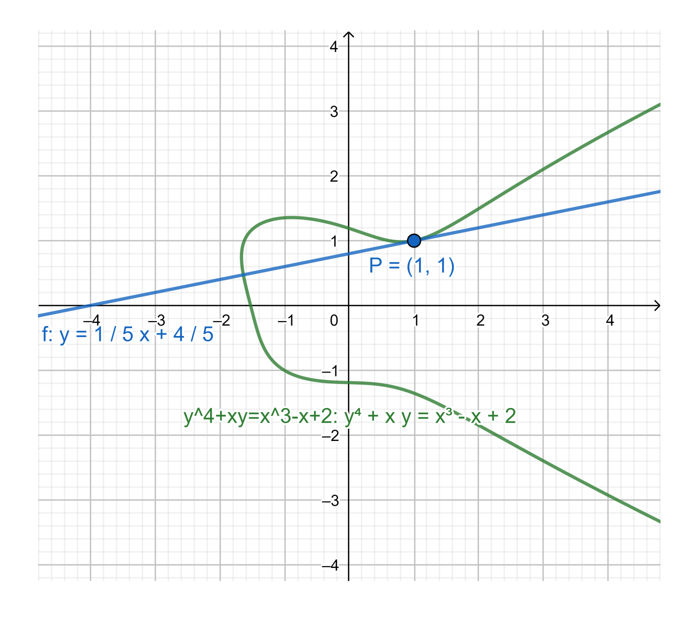


Figura 2.4: Gráfica del ejemplo 1

2.- Calcule $\frac{dy}{dx}$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ de la curva $\sqrt{2}\cos(x+y) = \cos x - \cos y$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}\sqrt{2}\cos(x+y) &= \frac{dy}{dx}(\cos x - \cos y) \\
-\sqrt{2}\sin(x+y)(1+\frac{dy}{dx}) &= -\sin x + \sin y\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sin x - \sqrt{2}\sin(x+y)}{\sin y + \sqrt{2}\sin(x+y)} \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} &= \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

3.- Halle la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,0)$ de la curva $x^2 + \sin y = xy^2 + 1$

Solución:

$$\begin{aligned}
2x + \cos y y' &= y^2 + 2xyy' \\
\cos y y' - 2xyy' &= y^2 - 2x \\
y' &= \frac{y^2 - 2x}{\cos y - 2xy}
\end{aligned}$$

$y'(1,0) = -2$, Ec.recta tangente:$y = 2 - 2x$

4.- Halle todos los puntos de la curva $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ en que la recta tangente sea horizontal

Solución:

Derivando implícitamente se tiene $6x + 8yy' + 3y + 3xy' = 0$, para hallar los puntos y' debe ser cero, luego:

$6x + 3y = 0 \Rightarrow y = -2x$, reemplazando esto en la ecuación de la curva:

$$3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$

$$13x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{24}{13}}$$

$$y = -2x = \pm 2\sqrt{\frac{24}{13}}$$

Así, los puntos de la recta tangente horizontal son: $P_1 = \left(\sqrt{\frac{24}{13}}, -2\sqrt{\frac{24}{13}}\right)$, $P_2 = \left(-\sqrt{\frac{24}{13}}, 2\sqrt{\frac{24}{13}}\right)$

Ejercicios propuestos:

1.- Halle la ecuación de la recta tangente al punto $P = (-1, 0)$ de la curva $\frac{1}{2}x^2y^3 - 2xy^2 = x - 5$ y grafíquelo.

2.- Halle la ecuación de la recta tangente al punto $P = \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ de la curva $\sin(x + 2y)\cos x = \sin y - \frac{\pi}{6}$ y grafíquelo.

3.- Sea $5y^2 + \sin y = x^3$, halle $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$.

4.- La ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ es llamada **Folio de Descartes**

a) Halle $\frac{dy}{dx}$ y grafique la ecuación.

b) Halle una ecuación de la recta tangente en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

c) ¿En qué puntos del primer cuadrante es la recta tangente horizontal?

5.- Sea $\frac{xy^3}{1 + \cos y} = 1 + y^4$, halle $\frac{dy}{dx}$

6.- La ecuación $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ es llamada **Lemniscata**, grafique la curva y halle la ecuación de la recta tangente en el punto $(4, 16)$

7.- Sea $\tan(x^2y) = (x + y)^5$, calcule y'

8.- Halle los puntos de la curva $y^2 = x^3 - 3x + 1$ en que la recta tangente sea horizontal.
Sugerencia: Verifique si los puntos encontrados pertenecen a la curva

9.-Pruebe que ningún punto de la curva $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ tiene una recta tangente horizontal.

2.8. Tasas Relacionadas

En esta última sección se verá problemas sobre tasas relacionadas, el objetivo es calcular una tasa de variación desconocida en términos de otras tasas de variación que ya se conocen. Se mencionará 4 pasos importantes para el desarrollo de estos problemas:

Paso 1: Dibujar un diagrama siempre que sea posible.
Paso 2: Asignar variables y reformular el problema.
Paso 3: Hallar una ecuación que relacione las variables y derivar. Esto proporcionará una ecuación que relaciona las derivadas conocidas con las desconocidas.
Paso 4: Usar los datos para hallar la derivada desconocida.

Observación:
En el paso 3 no deben sustituirse las variables por valores concretos antes de haber calculado todas las derivadas.

Ejemplos:

1.- Se introduce agua en un depósito cónico de 10m de altura y 4m de radio a un ritmo de $6m^3/min$.
a) ¿Con qué ritmo asciende el nivel del agua a los 5m de altura?
b) ¿Qué sucede con el ritmo al que asciende el nivel del agua a medida que transcurre el tiempo?. Justifique su respuesta.

Solución:

Paso 1:

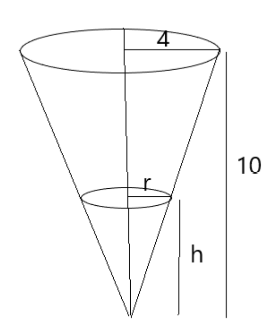


Figura 2.5: Llenado de un depósito cónico

Paso 2:
Sean $V(t)$: el volumen del cono
$h(t)$: la altura del agua en el depósito en el instante t
Reformulación: Calcule $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}$ sabiendo que $\frac{dV}{dt} = 6m^3/min$
Paso 3:
Usando semejanza de triángulos en el gráfico: $\frac{r}{h} = \frac{4}{10} \Rightarrow r = 0{,}4h$
Se sabe que el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi hr^2 = \frac{1}{3}\pi h(0{,}4h)^2 = \frac{0{,}16}{3}\pi h^3$
Derivando respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}16\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Paso 4:
Se sabe que $\frac{dV}{dt} = 6$, entonces $6 = 0{,}16\pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{6}{0{,}16\pi h^2}$
$\Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5} = 0{,}48m/min$

2.- Una carretera perpendicular a una autovía conduce a un rancho situado a $2km/h$ de distancia. Un automóvil se aleja del rancho por la autovía a una velocidad de $80km/h$.
¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre el automóvil y el rancho cuando el coche está a $6km/h$ mas allá de la intersección de la autovía con la carretera?

Solución:

Paso 1:

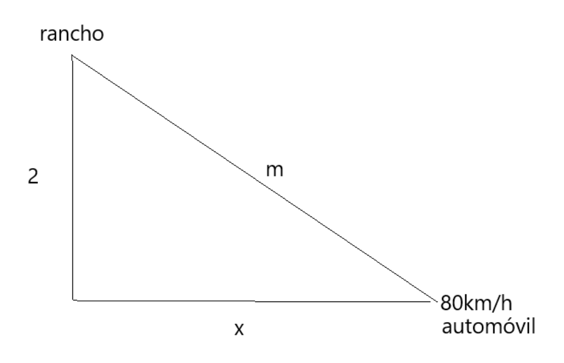


Figura 2.6: Ejemplo 2

Paso 2:
Sean x : distancia entre el automóvil y la autovía
m : distancia entre el automóvil y el rancho
Reformulación: Calcule $\left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{x=6}$ si $\dfrac{dx}{dt} = 80km/h$
Paso 3:

Por el teorema de Pitágoras: $m = \sqrt{4+x^2} \;\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{x\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{4+x^2}}$
Paso 4:
$\left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{x=6} \approx 75,90km/h$

3.- Un hombre de $1,8m$ de altura se aleja de un poste de luz de $5m$ a una velocidad de $1,2m/s$ como se muestra en la figura. Halle la rapidez con que su sombra aumenta de longiud.

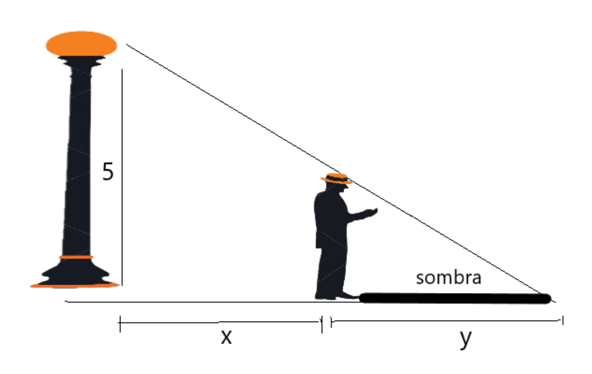


Figura 2.7: Ejemplo 3

Solución:

Paso 2:
Sean $x(t)$: La distancia del poste al hombre en el instante t
$y(t)$: La distancia del hombre a su sombra en el instante t
Se sabe que $\frac{dx}{dt} = 1,2m/s$, la distancia desde el poste hasta el hombre en cualquier instante t es $x(t) = 1,2t$.
Reformulación: Calcule $\frac{dy}{dt}$ si $x = 1,2t$
Paso 3:
Por relación de triángulos: $\frac{y}{1,8} = \frac{x+y}{5} = \frac{1,2t+y}{5} \Rightarrow y = \frac{2,16t}{3,2} = 0,675t$
Paso 4:
$\frac{dy}{dt} = 0,675m/s$

4.- El tractor de un granjero que se desplaza a $3m/s$ tira de una cuerda atada a un ladrillo, por medio de una polea. Con unas dimensiones como se observa en la figura. ¿A qué velocidad asciende el ladrillo, cuando el tractor se encuentra a $5m$ de éste?

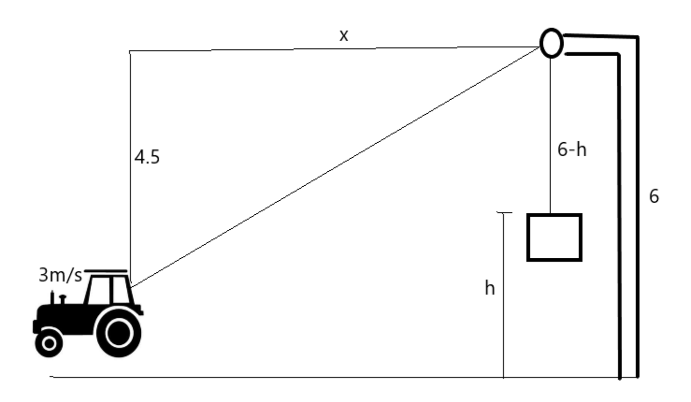


Figura 2.8: Ejemplo 4

Solución:

Paso 2:
$x(t)$: distancia horizontal del tractor al ladrillo
$h(t)$: altura del ladrillo en el instante t
Reformulación: Calcule $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=5}$ si $\frac{dx}{dt} = 3m/s$
Paso 3:
Sea L la longitud total de la cuerda:

$$L = \sqrt{x^2 + 4,5^2} + 6 - h$$

$\frac{dL}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2 + 4,5^2}} - \frac{dh}{dt}$, como L es siempre constante (pues es la longitud

de la cuerda) tenemos que:

$$\frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+4,5^2}} - \frac{dh}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dh}{dt} = \frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+4,5^2}}$$

Paso 4:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=5} = \frac{5(3)}{\sqrt{25+4,5^2}} \approx 2,23m/s$$

5.- Una partícula se mueve por una curva $y = f(x)$, tal y como se ilustra en la figura. Sea $L(t)$ la distancia de la partícula al origen. Entonces:

a) Demuestre que $\dfrac{dL}{dt} = \left(\dfrac{x+f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2+f(x)^2}}\right)\dfrac{dx}{dt}$

b) Calcule $L'(t)$ cuando $x = 1$ y $x = 2$ si $f(x) = \sqrt{3x^2-8x+9}$ y $\dfrac{dx}{dt} = 4$

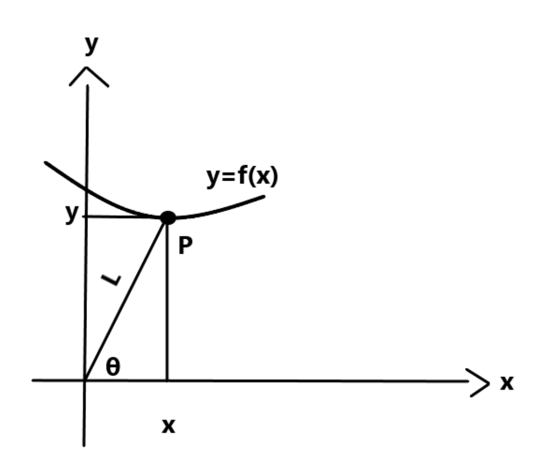


Figura 2.9: Ejemplo 5

Solución:

a) Según el gráfico en un punto x tal que $y = f(x)$:

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$$

Derivando respecto a t tenemos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2x\dfrac{dx}{dt} + 2f(x)f'(x)\dfrac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$$= \frac{2(x + f(x)f'(x))\dfrac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$$= \Big(\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}\Big)\frac{dx}{dt}$$

b) Derivando la función:

$$f'(x) = \frac{3x - 4}{\sqrt{3x^2 - 8x + 9}}$$

en $x = 1$: $f(1) = 2$, $f'(1) = \dfrac{-1}{2}$

$$\frac{dL}{dx}\Big|_{x=1} = \left(\frac{1 + 2\Big(\dfrac{-1}{2}\Big)}{\sqrt{1+4}}\right)(4) = 0m/s$$

en $x = 2$: $f(2) = \sqrt{5}$, $f'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{dL}{dt}\Big|_{x=2} = \left(\frac{2 + \sqrt{5}\Big(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Big)}{\sqrt{4+5}}\right)(4) = \frac{16}{3}m/s$$

6.- Dos trenes salen de una estación cuando $t = 0$ y circulan con velocidad v constante cada uno a lo largo de vías rectilíneas que forman un ángulo θ.
a) Pruebe que los trenes se separan uno del otro a una velocidad de $v\sqrt{2 - 2\cos\theta}$.
b) ¿A qué es igual esta fórmula cuando $\theta = \pi$?

Solución:

Paso 1:

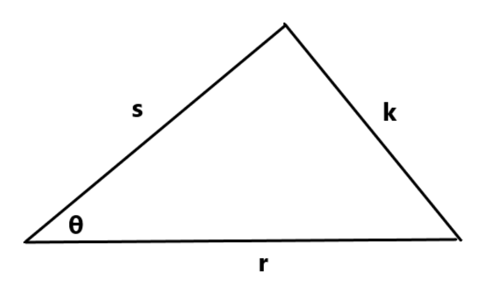


Figura 2.10: Ejemplo 6

Paso 2:
a) Sean $s(t)$: la distancia que recorre el primer tren
$r(t)$: la distancia que recorre el segundo tren
$k(t)$: la distancia que separa a los trenes en el instante t
Se sabe que $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dr}{dt} = v$
Reformulación: Calcule $\dfrac{dk}{dt}$ si $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{ds}{dt} = v$
Paso 3:
Como v es constante, la distancia que recorre cada tren sería: $s = r = vt$.

Ahora, por la ley de cosenos, en el gráfico:

$$k = \sqrt{s^2 + r^2 - 2sr\cos\theta}$$

Luego, derivando respecto a t:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{2s\dfrac{ds}{dt} + 2r\dfrac{dr}{dt} - 2(r+s)\cos\theta\dfrac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2 + r^2 - 2sr\cos\theta}}$$

$$= \frac{2v^2t + 2v^2t - 2(2v^2t)\cos\theta}{2\sqrt{2v^2t^2 - 2v^2t^2\cos\theta}}$$

$$= \frac{v^2t(x - 2\cos\theta)}{vt\sqrt{2 - 2\cos\theta}}$$

$$= v\sqrt{2 - 2\cos\theta}$$

b) Cuando $\theta = \pi$, tenemos que $\dfrac{dk}{dt} = 2v$ porque se alejan.

Ejercicios propuestos:

1.- En un depósito rectangular entra agua a un ritmo de $0,5m^3/min$.¿Con qué rapidez asciende el nivel del agua si las dimensiones del depósito son de $2,5$x6 metros?

2.- Una escalera de 4 metros está apoyada en una pared. La base de la escalera se encuentra a 2 metros de la pared en el instante $t = 0$ y se desliza, apartándose de la pared a un ritmo de 0,6m/s. Halle la velocidad del extremo superior de la escalera en $t = 1$.

3.- Una vía de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de 45°. Una locomotora dista 160m del cruce y se aleja de él a la velocidad de 80$km/hora$, un

automóvil dista del cruce $160m$ y se acerca a él a la velocidad de $30km/hora$. ¿A que razón se altera la distancia entre los dos?

4.- Al caer una gota esférica de lluvia, alcanza una capa de aire más seco en los niveles más bajos de la atmósfera y comienza a evaporarse. Si esta evaporación se produce a una velocidad proporcional al área de la superficie ($s = 4\pi r^2$) de la gota, probar que el radio se contrae a la velocidad constante.

5.- En que punto de la parábola $y^2 = \frac{1}{2}x$, la ordenada crece dos veces más deprisa que la abscisa?.

6.- Un bote es arrastrado hacia un muelle por medio de una cuerda atada a una polea en el muelle como se ilustra en la figura, la cuerda se une a la proa del bote 10 pies por debajo de la polea, Si se tira de la cuerda a través de la polea a una velocidad de $20pies/min$, ¿a qué velocidad se acercará el barco al atracar cuando faltan 125 pies de cuerda?

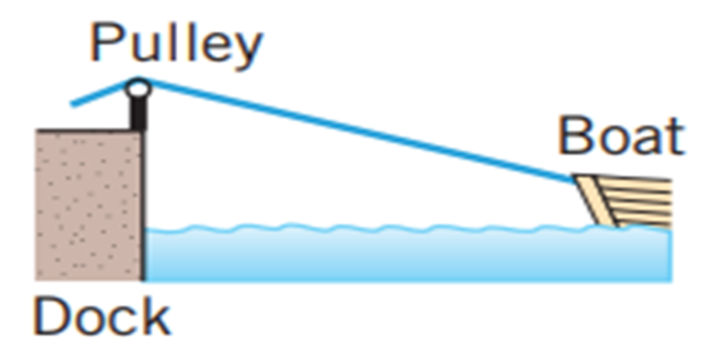


Figura 2.11: Ejercicio 6

7.- Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia r (en millas) del centro de la Tierra está dada por:

$$r = \frac{4995}{1 + 0,12\cos\theta}$$

donde θ es el ángulo medido desde el punto en la órbita más cercano a la superficie de la Tierra como se ilustra en la figura.

a) Encuentre la altitud del satélite en el **perigeo** (el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el **apogeo** (el punto más lejos de la superficie de la Tierra). Utilice 3960 millas como el radio de la Tierra.

b) En el instante en que $\theta = 120°$, el ángulo θ aumenta a razón de 2,7°$/min$. Encuentre la altitud del satélite y la velocidad a la que cambia la altitud en este instante. Exprese la tasa en unidades de $millas/min$

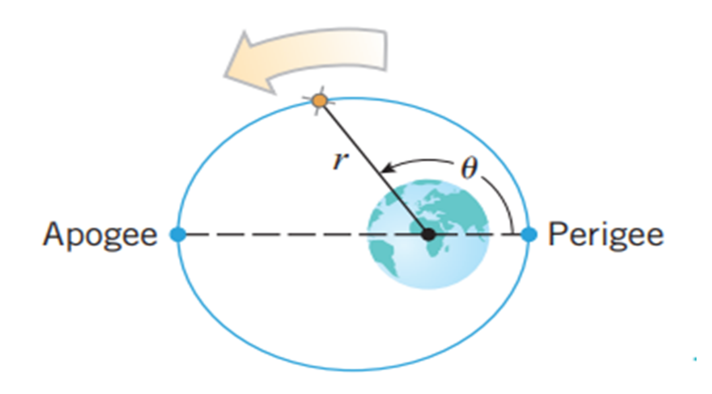


Figura 2.12: Ejercicio 7

8.- Una aeronave asciende en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. ¿Con qué rapidez gana altura la aeronave si su velocidad es de 500$mill/h$?

9.- Una persona observa un cohete con un telescopio para determinar su velocidad. El cohete asciende verticalmente desde su plataforma de lanzamiento

situada a una distancia de $6km$ del observador. En un cierto instante, el ángulo entre el telescopio y el suelo es igual $\frac{\pi}{3}$ y está variando a razón de $0,9\frac{rad}{min}$. ¿Cuál es la velocidad del cohete en ese momento?.

10.- Cuando Claudia se aleja de un poste de luz de $286cm$, la punta de su sombra se mueve el doble de rápido que ella. ¿Cuál es la altura de Claudia?.

11.- Un puntero láser se sitúa en una plataforma que gira a razón de 20 revolciones por minuto. El haz toca a una pared a 8 metros de distancia produciendo un punto de luz que se mueve horizontalmente sobre la pared. Sea α el ángulo entre el haz y la línea perpendicular al reflector y la pared. ¿A qué velocidad se mueve el punto de luz cuando $\alpha = \frac{\pi}{3}$?.

12.- En el ejemplo 5:
a) Pruebe que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Big(\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2 + f(x)^2}\Big)\frac{dx}{dt}$$

Sugerencia: Derive $\tan\theta = \frac{f(x)}{x}$ *y note que* $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$

b) Calcule $\theta'(t)$ cuando $x = 1$ y $x = 2$ si $f(x) = \sqrt{5x^3 + 7}$

Capítulo 3

Aplicaciones de la derivada

3.1. Valores Extremos

Definición: Valores extremos en un intervalo
Sea $f(x)$ una función en un intervalo I y sea $a \in I$. Se dice que $f(a)$ es el:

Mínimo global (Mínimo absoluto): *de $f(x)$ en I, si $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in I$*

Máximo global (Máximo absoluto): *de $f(x)$ en I, si $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in I$*

Observación:
No todas las funciones poseen mínimo o máximo absoluto.

Teorema: Existencia de extremos en un intervalo cerrado
Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en I.

Extremos Locales y Puntos críticos

Definición: Extremos locales
Se dice que $f(x)$ tiene un:
i) ***Mínimo local (Mínimo relativo):*** *en $x = c$ si $f(c)$ es el valor mínimo de f en algún intervalo abierto del $\mathrm{Dom} f$ que contenga a c ($f(c) \leq f(x)$).*

ii) ***Máximo local (Máximo relativo):*** *en $x = c$ si $f(c)$ es el valor máximo de f en algún intervalo abierto del Dom$f$ que contenga a c ($f(c) \geq f(x)$).*

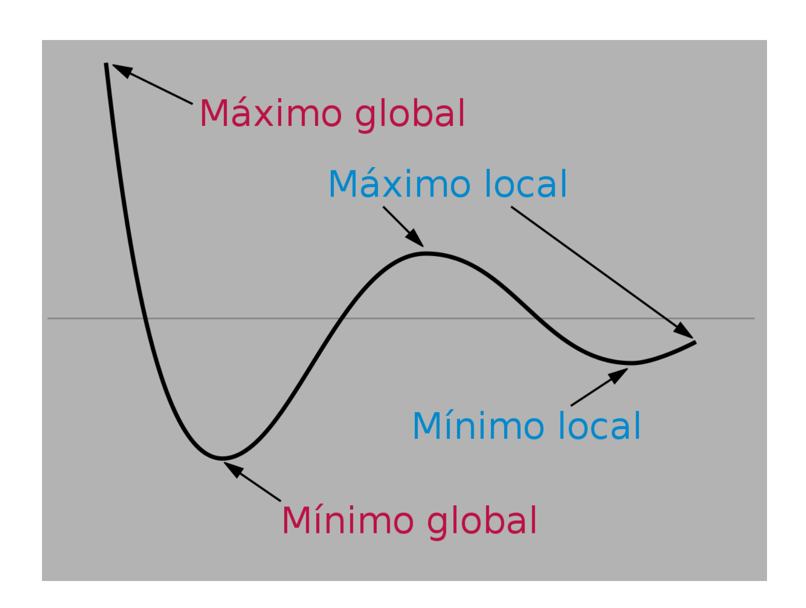


Figura 3.1: Extremos locales y globales de una función

Observación:
Para encontrar los extremos locales de una función, notemos que la recta tangente en un máximo y mínimo local es horizontal. Es decir, si $f(c)$ es un máximo o mínimo local, entonces $f'(c) = 0$. Esto quiere decir que $f(x)$ es derivable, si no lo es la recta tangente podría no existir.
Para tener en cuenta ambas posibilidades; se define la noción de punto crítico.

Definición: Punto crítico
Un número $c \in$ Dom$f$ es un punto crítico si $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Ejemplos:

1.- Hallar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$

Solución:

Como $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, los puntos críticos son las soluciones de $f'(x) = 0$, luego:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) \\ &= 3(x-2)(x-4) = 0 \end{aligned}$$

Por lo cual la función tiene puntos críticos en $c = 2$ y $c = 4$

2.- Hallar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 54x + 2$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 54 = 3(x^2 - 3x - 27) = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-27)}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

puntos críticos: $x_1 = \dfrac{3 + 3\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 - 3\sqrt{13}}{2}$

3.- Hallar los puntos críticos de $f(x) = |x|$

Solución:

La función $|x|$ no es derivable, por tanto:
$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$
Así, $f'(x) = 0$ no tiene soluciones si $x \neq 0$. Además, $f'(0)$ no existe. Así, $c = 0$ es un punto crítico de $f(x)$.

Teorema de Fermat:
Si $f(c)$ es un máximo o un mínimo local, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración:

Supongamos que $f(c)$ es un mínimo local (la demostración es muy similar para el caso en que $f(c)$ sea un máximo local). Si $f'(c)$ no existe entonces c es un punto crítico y no hay nada que demostrar.
Si $f'(c)$ existe, hay que probar que $f'(c) = 0$, como $f(c)$ es un mínimo local, se cumple que $f(c+h) \geq f(c)$, $\forall h \neq 0$ suficientemente pequeño. Luego, $f(c+h) - f(c) \geq 0$. Dividiendo esta desigualdad por h:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \text{ si } h > 0 \ (1)$$
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \text{ si } h < 0 \ (2)$$

Considerando los límites laterales en (1) y (2):

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq \lim_{h\to 0} 0 = 0$$
$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Así, se obtiene que $f'(c) = 0$.

Teorema: Valors extremos en un intervalo cerrado
Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a,b]$. Entonces c es o bien un punto crítico o bien uno de los extremos a o b

Demostración:
Si c es uno de los extremos no hay nada que demostrar. Si $c \in (a,b)$; $f(c)$ es el máximo o mínimo local en (a,b) , entonces por el teorema de Fermat, c es un punto crítico.

Pasos para hallar los extremos de una función:
1.- Hallar los puntos críticos
2.- Comparar los valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo

Ejemplos:

4.- Hallar los extremos de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 7$ en $[0, 6]$

Solución:

Paso 1:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4) = 0$$

Los puntos críticos son $c = 1$ y $c = 4$

Paso 2:

Valor de x	Valor de f
1 (punto crítico)	$f(1) = 18$
4 (punto crítico)	$f(4) = -9$
0 (extremo del intervalo)	$f(0) = 7$
6 (extremo del intervalo)	$f(6) = 43$

Según la tabla el máximo se alcanza en 6 y el mínimo en 4

5.- Hallar los extremos de $y = \dfrac{x^2+1}{x-4}$ en $[5, 6]$

Solución:

Paso 1:

$$y' = \frac{2x(x-4) - x^2 - 1}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 1}{(x-4)^2} = 0$$

y no es derivable en $x = 4$, además:
$x_1 = 4$, $x_2 = 4 + \sqrt{17}$ y $x_3 = 4 - \sqrt{17}$ no son puntos críticos de f porque no están en $[5, 6]$.

Paso 2:

Valor de x	Valor de f
5 (extremo del intervalo)	$f(5) = 26$
6 (extremo del intervalo)	$f(6) = 18$

Según la tabla el máximo se alcanza en 26 y el mínimo en 18,5

Teorema de Rolle:
Supongamos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces hay un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

Demostración:
Como $f(x)$ es continua y $[a, b]$ es cerrado, $f(x)$ tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$. Dicho esto la demostración se realizará en dos casos:

i) Si c es un valor extremo de $[a, b]$:
Como $c \in (a, b)$ en el cual $f(x)$ alcanza un valor extremo, entonces $f(c)$ es un extremo local y por el teorema de Fermat $f'(c) = 0$.

ii) Si c no es un valor extremo de $[a, b]$
En este caso, por el teorema anterior tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en los extremos del intervalo, es decir en a o en b. Pero como $f(a) = f(b)$, el máximo y el mínimo coinciden y esto implica que $f(x)$ es una función constante.
Luego, al ser $f(x)$ constante $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ lo que significa también que $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.

Ejemplo:

6.- Comprobar el teorema de Rolle para $f(x) = \dfrac{x^2}{8x - 15}$ en $[3, 5]$

Solución:

$f(x)$ es derivable en $[3, 5]$ y continua en $(3, 5)$, luego $f(3) = f(5) = 1$. Se debe comprobar que existe $c \in [3, 5]$ tal que $f'(c) = 0$. Para ello:

$$f'(x) = \frac{2x(8x-15) - 8x^2}{8x-15} = \frac{2x(4x-15)}{8x-15} = 0$$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3,75$, vemos que $x_1 \notin [3,5]$ pero $x_2 \in [3,5]$, podemos tomar $c = 3,75$ y con ello se verifica el teorema de Rolle.

Ejercicios propuestos:

En los ejercicios 1-12 hallar los valores extremos de la función dada (puntos críticos, máximos y mínimos) en el intervalo dado

1.- $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$, $[-10, 10]$

2.- $f(x) = 1 - (x-2)^{4/5}$, $\mathbb{R}$

3.- $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\mathbb{R}^+$

4.- $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $[-1, 1]$

5.- $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$, $[0, 60]$

6.- $f(x) = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $\mathbb{R}$

7.- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 16$, $[-20, 42]$

8.- $f(x) = \cos x - 2\sin x$, $\mathbb{R}$

9.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 8}$, $\mathbb{R}^-$

10.- $f(x) = 4x - \sqrt{x^2 + 1}$, $\mathbb{R}$

11.- $f(x) = \cos x + \sin^2 x$, $[0, 2\pi]$

12.- $f(x) = \sin x + \cos^2 x$, $[0, 2\pi]$

13.- Compruebe el teorema de Rolle para $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x}$ en $[-1, 0]$

14.- Compruebe el teorema de Rolle para $g(x) = x^2 - 3x$
en $[-1, 4]$

15.- Demuestre que $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x - 12$ tiene exactamente un cero real.

16.- Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente un cero real.

17.- Demostrar que la ecuación $x^7 + 5x^3 + x - 6 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Sugerencia: En los ejercicios 15,16 y 17 utilice el teorema del valor intermedio para probar la existencia de una raíz luego aplique el teorema de Rolle para demostrar que esta raíz es única razonando por contradicción.

18.- Pruebe que $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x$ no tiene ningún cero c tal que $c > 0$.
Sugerencia: Observe que $x = 0$ es una raíz y aplique el teorema de Rolle

19.- Pruebe que los valores extremos de $f(x) = a\sin x + b\cos x$ son $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

20.- La respuesta de un circuito u otro sistema oscilatorio a una señal entrante de frecuencia ω viene descrita por la función:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2}}$$

Tanto ω_0 (la frecuencia natural del sistema) como D (el factor de amortiguamiento) son constantes positivas. La gráfica de ϕ se llama una **curva de resonancia** y la frecuencia positiva $\omega_r > 0$ donde ϕ alcanza su valor máximo (si tal frecuencia positiva existe) se denomina la **frecuencia resonante**.

Pruebe que $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2D^2}$ si $0 < D < \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ y que en caso contrario, la frecuencia resonante no existe.

3.2. Teorema del valor medio y monotonía

Teorema: Incrementos finitos
Supongamos que f y g son funcionas continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $x \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x)$

Demostración:
Consideremos $h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t)$ con $t \in [a, b]$. Se tiene que:
i) h es derivable en (a, b)
ii) $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$
Ahora, notemos que:
i) Si h es constante, entonces $h'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$

ii) Si existe $t \in (a, b)$ tal que $h(a) < h(t)$, existe $x \in (a, b)$ tal que x es un máximo local de h y así $h'(x) = 0$

iii) Si existe $t \in (a, b)$ tal que $h(a) > h(t)$, existe $x \in (a, b)$ tal que x es un mínimo local de h y así $h'(x) = 0$

Luego, para cualquiera de estos casos tenemos que:

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x)$$

Teorema: Valor medio de Lagrange
Supongamos que f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un valor de $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración:
Consideremos $g(c) = c$ continua en (a, b), luego por el teorema anterior:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación:
El teorema de Rolle es un caso especial del teorema del valor medio en el que $f(a) = f(b)$. En este caso la conclusión es que $f'(c) = 0$

Ejemplos:

1.- Comprobar el TVM (Teoremal del valor medio) para $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = 1$ y $b = 9$.

Solución:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{1}}{9 - 1} = \frac{1}{4}$$

Se debe determinar $c \in (1, 9)$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$$

Como $4 \in (1, 9)$ cumple que $f'(4) = \dfrac{1}{4}$

2.- Comprobar el TVM para $f(x) = \cos x - \sin x$ en $[0, 2\pi]$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(\sin x + \cos x) \\ f'(c) &= \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} \\ &\Rightarrow \sin c + \cos c = 0 \\ &\Rightarrow \cos c = -\sin c \ \Rightarrow c = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

Corolario:
Si f(x) es derivable y f'(x)=0 $\forall x \in (a,b)$ *entonces f(x) es constante en (a,b). Es decir, f(x)=c en (a,b) para alguna constante c.*

Demostración:

Sean a_0 y b_0 dos puntos distintos en (a,b) , entonces por el TVM existe $c \in (a_0, b_0)$ tal que $f(b_0) - f(a_0) = f'(c)(b_0 - a_0) \ \Rightarrow f(b_0) = f(a_0)$. Es decir, $f(x)$ es constante en (a,b).

Teorema: El signo de la derivada
Sea f una función derivable sobre un intervalo cerrado (a,b).
i) Si f'(x)>0 $\forall x \in (a,b)$ *, entonces f es estrictamente creciente en (a,b).*
ii) Si f'(x)<0 $\forall x \in (a,b)$ *, entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).*

Demostración:
Supongamos que $f'(x) > 0$, se tiene que para todo $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$; por el TVM para cualquiera de los puntos x_1 y x_2 en (a,b), existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ además como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ se tiene que $f(x_2) - f(x_1) > 0 \ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ es decir f es estrictamente creciente en (a,b). De manera similar se prueba para el caso en que $f'(x) < 0$.

Ejemplo:

3.- Probar que la función $f(x) = 3x - \cos 2x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$

Solución:

$f'(x) = 3 + 2\sin 2x$, pero $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq' (x) = 3 + 2\sin x \leq 5$ lo cual prueba que f es estrictamente creciente en toda la recta real.

Teorema: Criterio de la primera derivada
Supongamos que f(x) es derivable y sea c un punto crítico de f(x). Entonces:
i) Si f'(x) cambia de + a - en c entonces f(c) es un máximo local.
ii) Si f'(x) cambia de - a + en c entonces f(c) es un mínimo local.

Pasos para el estudio de los puntos críticos:
1.- Hallar los puntos críticos
2.- Determinar el signo de f' en los intervalos comprendidos entre los puntos críticos
3.- Aplicar el criterio de la primera derivada.

Ejemplos:

4.- Estudiar los puntos críticos de $f(x) = x^5 - 27x - 20$

Solución:

Paso 1:
$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$, puntos críticos: ± 3

Paso 2:

Intervalo	Punto de prueba	signo $f'(x)$	Comportamiento $f(x)$
$(-\infty, -3)$	$f'(-4) = 21$	+	creciente
$(-3, 3)$	$f'(0) = -27$	-	decreciente
$(3, +\infty)$	$f'(4) = 21$	+	creciente

Paso 3:
$c = -3$: $f'(x)$ cambia de + a - entonces $f(-3)$ es un máximo local.
$c = 3$: $f'(x)$ cambia de - a + entonces $f(3)$ es un mínimo local.

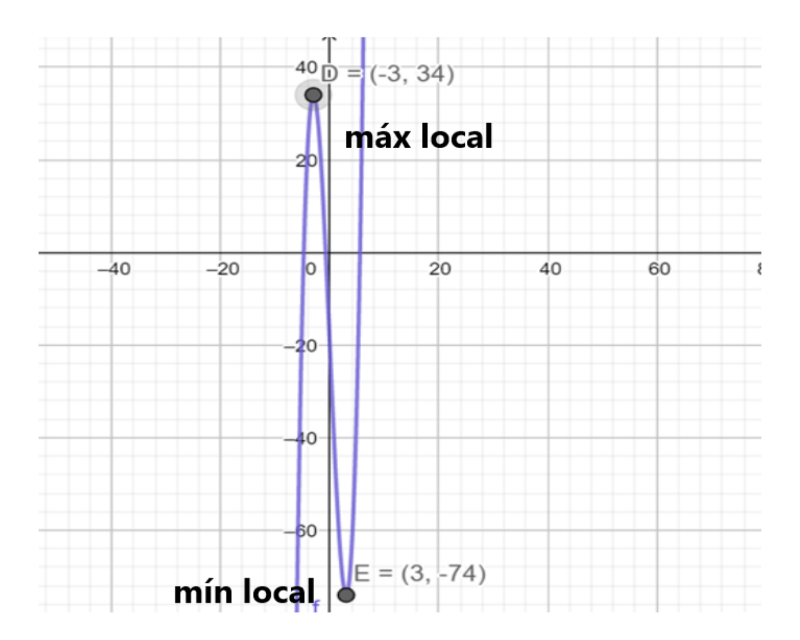


Figura 3.2: Ejemplo 4

5.- Estudiar los puntos críticos de $y = \sin t + \sqrt{3}\cos t$ para $[0, 2\pi]$

Solución:

Paso 1:
$y' = \cos t - \sqrt{3}\sin t = 0 \;\Rightarrow \cos t = \sqrt{3}\sin t$
puntos críticos: $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$

Paso 2:

Intervalo	Valor de prueba	signo $f'(x)$	comportamiento $f(x)$
$(0, \pi/3)$	$f'(\pi/4) \approx -0,51$	-	decreciente
$(\pi/3, 4\pi/3)$	$f'(\pi) = -1$	-	decreciente
$(4\pi/3, 2\pi)$	$f'(2\pi) = 1$	$+$	creciente

Paso 3:
$c = 4\pi/3$: $f'(x)$ cambia de - a + entonces $f(4\pi/3)$ es un mínimo local.

Ejercicios Propuestos:

En los ejercicios 1-10 Estudiar los puntos críticos para:

1.- $y = 5t^2 + 6t - 4$, $\mathbb{R}$

2.- $y = x^4 - 4x^{3/2}$, $\mathbb{R}^+$

3.- $g(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$, $[-\pi/2, 0]$

4.- $f(x) = x^3 - 12x + 36$, $\mathbb{R}$

5.- $f(x) = \sin^2 x - x$, $\mathbb{R}$

6.- $h(x) = \dfrac{x^2 + 6}{x - 2}$, $[10, 100]$

7.- $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $[0, \pi]$

8.- $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x$, $\mathbb{R}$

9.- $y = t(t - 1)^3$, $\mathbb{R}$

10.- $f(x) = x^2 + bx + c$, $\mathbb{R}$

11.- Probar que una función cúbica $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es estricta-

mente creciente en $(-\infty, +\infty)$ si $b > \dfrac{a^2}{3}$

12.- Comprobar el TVM para $y = x^{-1}$ en [2,8]

13.- Comprobar el TVM para $f(x) = (x - 8)(x + 4)$ en [-4,8]

14.- Demostrar el teorema del signo de la derivada si $f'(x) < 0$

15.- Demuestre que si $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para $x \geq 0$, entonces $f(x) \leq g(x), \forall x \geq 0$

3.3. El criterio de la segunda derivada

Definición: Concavidad y Convexidad
Sea f(x) una función derivable en un intervalo abierto (a,b). Entonces:
*i) f es **convexa** en (a,b) si f'(x) es estrictamente creciente en (a,b).*
*ii) f es **cóncava** en (a,b) si f'(x) es estrictamente decreciente en (a,b).*

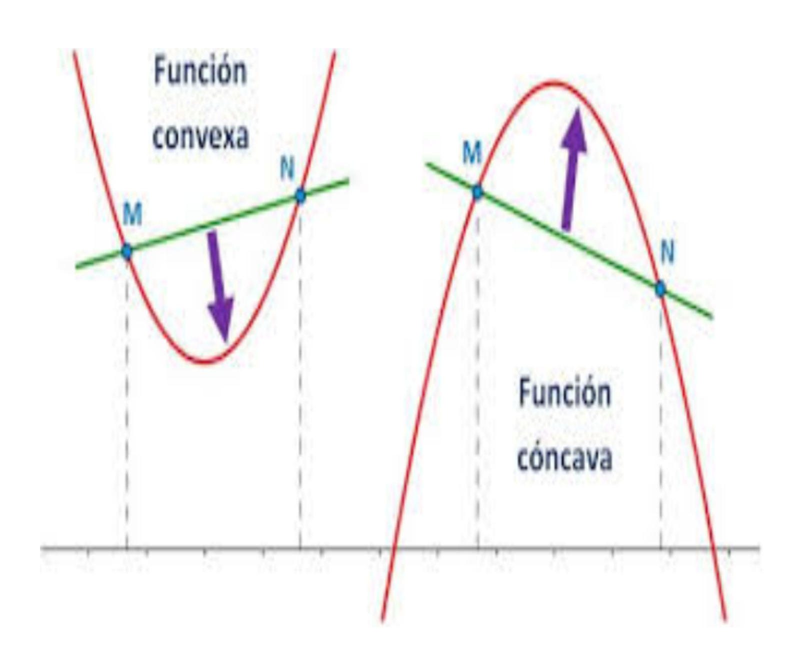


Figura 3.3: Función cóncava y convexa

Observación:
Como se puede observar en la figura 3.3 las pendientes de las rectas tangentes de una función convexa son estrictamente crecientes, de forma similar las pendientes de las rectas tangentes de las funciones cóncavas son estrictamente decrecientes.

Teorema: Criterio de concavidad/convexidad
Supongamos que f"(x) existe para todo $x \in (a, b)$

i) Si f"(x)>0 $\forall x \in (a, b)$ *, entonces f es convexa en (a,b)*

ii) Si f”(x)<0 $\forall x \in (a, b)$ *, entonces f es cóncava en (a,b)*

Definición: Punto de inflexión
Se dice que P=(c,f(c)) es un punto de inflexión de f(x) si hay un cambio de concavidad a convexidad o viceversa en x=c

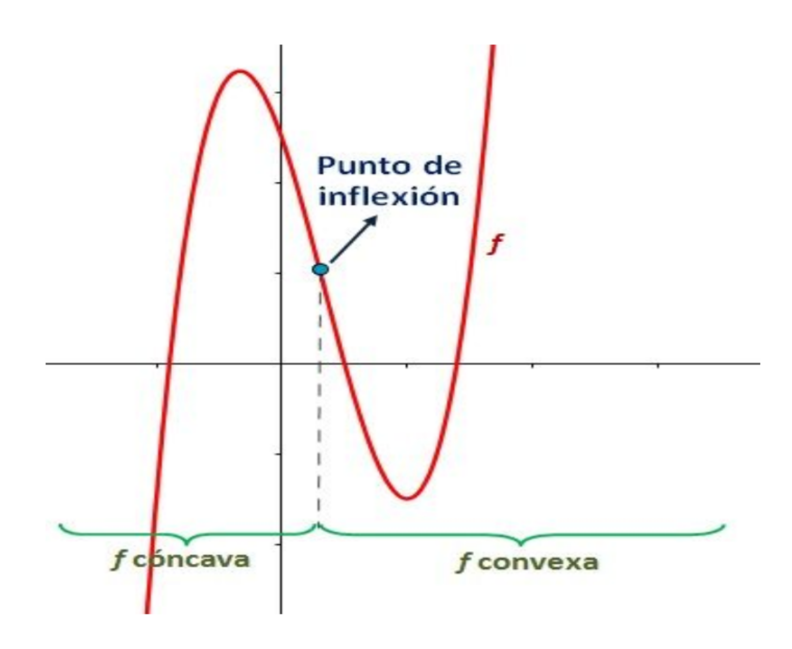


Figura 3.4: Punto de inflexión de una función

Teorema: Caracterización de los puntos de inflexión
Supongamos que f'(x) existe. Si f”(c)=0 y f”(x) cambia de signo en x=c, entonces f(x) tiene un punto de inflexión en x=c

Ejemplos:

1.- Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad/convexidad de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$

Solución:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$$
$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1) = 0$$
$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 0$$

Intervalo	Valor de prueba	signo $f''(x)$	Comportamiento $f(x)$
$(-\infty, 0)$	$f''(-1) = -120$	-	cóncava
(0,1)	$f''(1/2) = -15/2$	-	cóncava
$(1, +\infty)$	$f''(2) = 240$	$+$	convexa

En $c = 1$ hay un punto de inflexión, ya que $f''(x)$ cambia de signo en 1

2.- Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad/convexidad de $y = x(x - 8\sqrt{x})$ para $x \geq 0$

Solución:

$$y' = 2x - 12x^{1/2}$$
$$y'' = 2 - 6x^{-1/2} = 0$$
$$x = 9$$

Intervalo	Valor de prueba	signo $f''(x)$	Comportamiento $f(x)$
(0,9)	$y''(1) = -4$	-	cóncava
$(9, +\infty)$	$y''(16) = 1/2$	$+$	convexa

en $x = 9$ hay un punto de inflexión

Observación:
Por lo general, se encuentran los puntos de inflexión resolviendo la ecuación $f''(x) = 0$. Sin embargo, puede haber puntos de inflexión c en los que $f''(c)$ no exista.

Teorema: Criterio de la segunda derivada
Sea c un punto crítico de f(x). Si f"(c) existe, entonces:

i) f"(c)>0 $\Rightarrow$ f(c) es un mínimo local

ii) f"(c)<0 $\Rightarrow$ f(c) es un máximo local

iii) f"(c)=0 $\Rightarrow$ el criterio no concluye , es decir f(c) podría ser un extremo o no.

Observación:
Si el criterio de la segunda derivada falla en un punto c ($f''(c) = 0$), se regresa al criterio de la primera derivada seleccionando puntos de prueba a la derecha y a la izquierda de c.

Ejemplos:

3.- Estudiar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ en $\mathbb{R}$

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x-5)(x-3)$
puntos críticos: 5,3
$f''(x) = 6x - 24 \ \Rightarrow f''(5) = 6 > 0$, $f''(3) = -6 < 0$
$f(5)$ es un mínimo local y $f(3)$ es un máximo local

4.- Estudiar los puntos críticos de $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ en $[0, \pi]$

Solución:

$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = 0$
puntos críticos: $0, \pi, \pi/3$
$f''(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 2\cos 2x - \cos x$

$f''(0) = 1 > 0 \ \Rightarrow f(0)$ es un mínimo local
$f''(\pi) = 3 > 0 \ \Rightarrow f(\pi)$ es un mínimo local
$f''(\pi/3) = -3/2 < 0 \ \Rightarrow f(\pi/3)$ es un máximo local

Ejercicios propuestos:

En los ejercicios 1-15 determinar los intervalos de concavidad/convexidad , hallar (si existen) los puntos de inflexión y los extremos de la función.

1.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, $\mathbb{R}$

2.- $f(x) = 2 - \dfrac{x^2}{3x-1}$, $\mathbb{R}$

3.- $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$, $\mathbb{R}$

4.- $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+8}$, $\mathbb{R}$

5.- $f(x) = x^5 - x^3$, $\mathbb{R}$

6.- $f(x) = x + \sin^2 x$, $[0, \pi]$

7.- $f(x) = 2 + \tan^2 x$, $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

8.- $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + 4}$, $[0, 2\pi]$

9.- $f(x) = x^{1/3}(x-4)$, $[0, 10]$

10.- $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$, $\mathbb{R}$

11.- $f(x) = (x+2)\sqrt{-x}$, $x < 0$

12.- $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$, $\mathbb{R}$

13.- $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$, $\mathbb{R}$

14.- $f(x) = x - \arctan x$, $\mathbb{R}$

15.- $f(x) = \dfrac{\arccos x}{1 + \sin x}$, $\mathbb{R}$

16.- Si $f'(c) = 0$ y $f(c)$ no es ni un mínimo local, ni un máximo local ¿debe ser $x = c$ un punto de inflexión?. En la mayoría de funciones la respuesta de esta pregunta es cierta, sin embargo no es verdadera en general. Por ello sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ , } x \neq 0 \\ 0 \text{ , } x = 0 \end{cases}$$

a) Usando la definición de derivada pruebe que $f'(0)$ existe y que $f'(0) = 0$

b) Pruebe que $f(0)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local

c) Demuestre que $f'(x)$ cambia infinitas veces de signo cerca de $x = 0$ y concluya que $x = 0$ no es un punto de inflexión

3.4. Dibujo de Gráficas

El objetivo en esta sección es representra gráficas de funciones usando la información que nos proporcionen las derivadas f' y f''. Se verá como obtener los esbozos sin la necesidad de calcular largas tablas de valores.
Ya se vió en la sección 1.3 cómo calcular asíntotas verticales, ahora se verá también cómo obtener (si existen) asíntotas horizontales y oblicuas de una función f.

Definición:
Asíntota horizontal:
Una función tiene asíntota horizontal en $y=b$ *si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

Asíntota oblicua:
Una función tiene asíntota oblicua en $y=mx+b$ *si* $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *, donde* $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ *; además* $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

Observación:
Se puede demostrar que si una función tiene asíntota horizontal entonces no tiene asíntota oblicua. Esto era de esperarse puesto la asíntota horizontal es un caso particular de la asíntota oblicua cuando $m = 0$.

Pasos para dibujar gráficas de funciones:
Paso1 :
Determinar los signos de f' y f'' en el dominio de la función o en el intervalo en el que se esté trabajando.

Paso 2:
Anotar los puntos de transición y las combinaciones de signos.

Paso 3:
Trazar arcos de la forma y comportamiento asintóticos correctamente.

Ejemplos:

En los ejercicios 1-5 dibujar la gráfica de la función.

1.- $f(x) = x^3 - 3x + 5$

Solución:

Paso 1:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

puntos críticos: $x = \pm 1$

Intervalo	Valor de prueba	signo f'	comportamiento
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) = 9$	$+$	creciente
(-1,1)	$f'(0) = -3$	-	decreciente
$(1, +\infty)$	$f'(2) = 9$	$+$	creciente

$$f''(x) = 6x = 0$$

ceros de f'': $x = 0$

Intervalo	Valor de prueba	signo f''	comportamiento
$(-\infty, 0)$	$f''(-1) = -6$	-	cóncava
$(0, +\infty)$	$f''(1) = 6$	$+$	convexa

Paso 2:
En $c = -1$: máximo local, $f(-1) = 7$
En $c = 1$: mínimo local, $f(1) = 3$
En $c = 0$: punto de inflexión, $f(0) = 5$
Intersección con el eje y: $f(x) = 5$
Intersección con el eje x:
$x^3 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x_0 \approx -2,28$

Paso 3:

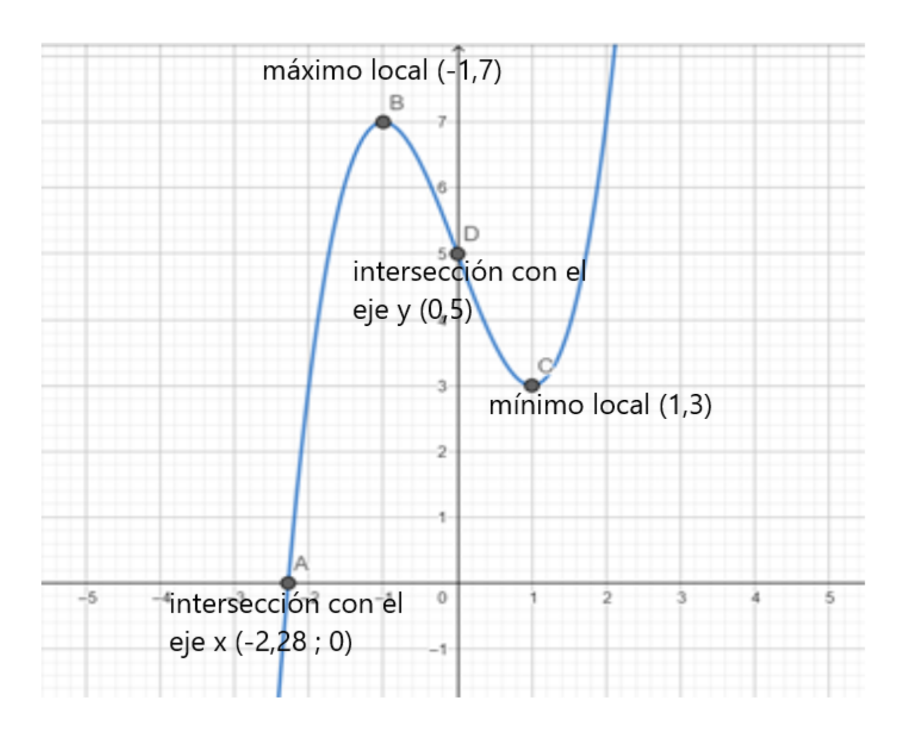


Figura 3.5: Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 5$

2.- $y = x - 4\sqrt{x}$

Solución:

Primero, el dominio de la función es $Dom\ y : [0, +\infty]$
Paso 1:

$$y' = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{(No existe } y'(0))$$
$$x = 4$$

puntos críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

Intervalo	Valor de prueba	signo y'	comportamiento
$(0,4)$	$y'(1) = -1$	-	decreciente
$(4,+\infty)$	$y'(25) = 3/5$	$+$	creciente

$$y'' = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x^{3/2}} = 0$$

No existe $y''(0)$

Intervalo	Valor de prueba	signo y''	comportamiento
$(0,+\infty)$	$y''(1) = 1$	$+$	convexa

Paso 2:
En $c = 4$: mínimo local , $y(4) = -4$
Intersección con el eje y: y=0
Intersección con el eje x:
$x^{1/2}(x^{1/2} - 4) = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0 \;,\; x_2 = 16$

Paso 3:

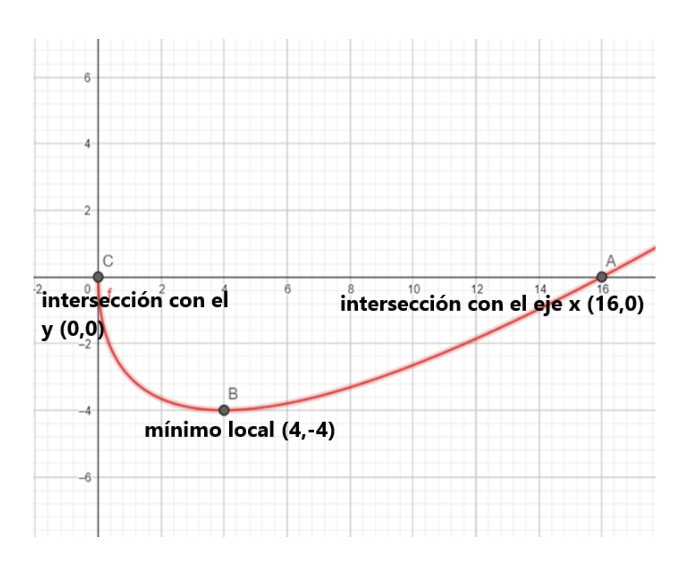


Figura 3.6: Gráfica de $y = x - 4\sqrt{x}$

3.- $y = \sin x + \cos x$, $[0, 2\pi]$

Paso 1:

$$y' = \cos x - \sin x = 0 \;\Rightarrow \sin x = \cos x$$

puntos críticos: $x_1 = \pi/4$, $x_2 = 3\pi/4$

Intervalo	Valor de prueba	signo y'	comportamiento
$(0, \pi/4)$	$y'(\pi/6) = (-1 + \sqrt{3})/2$	$+$	creciente
$(\pi/4, 3\pi/4)$	$y'(\pi/2) = -1$	-	decreciente
$(5\pi/4, 2\pi)$	$y'(3\pi/2) = 1$	$+$	creciente

$$y'' = -(\sin x + \cos x) = 0 \;\Rightarrow \cos x = -\sin x$$

ceros de y'': $x_1 = 3\pi/4$, $x_2 = 7\pi/4$

Intervalo	Valor de prueba	signo y''	comportamiento
$(0, 3\pi/4)$	$y''(\pi/2) = -1$	-	cóncava
$(3\pi/4, 3\pi/4)$	$y''(\pi) = 1$	$+$	convexa
$(7\pi/4, 2\pi)$	$y''(11\pi/6) \approx -0,36$	-	cóncava

Paso 2:
En $c = \pi/4$: máximo local, $y(\pi/4) = \sqrt{2}$
En $c = 5\pi/4$: mínimo local, $y(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
En $c = 3\pi/4$: punto de inflexión, $y(3\pi/4) = 0$
En $c = 7\pi/4$: punto de inflexión, $y(7\pi/4) = 0$
Intersección en el eje y: $y = 1$
Intersección con el eje x: $x_1 = 3\pi/4$, $x_2 = 7\pi/4$

Paso 3:

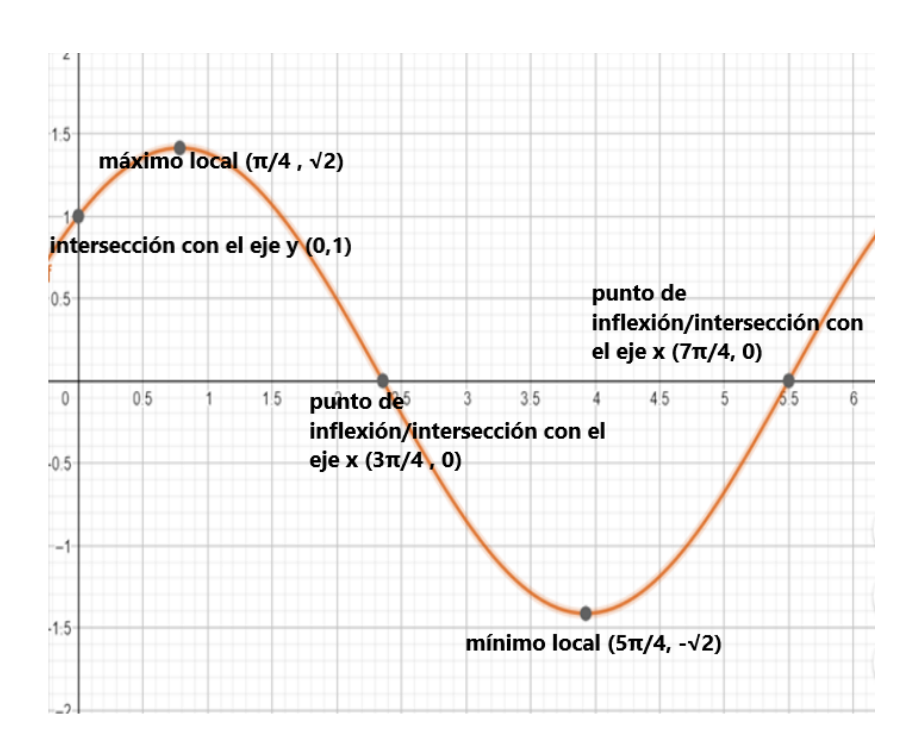


Figura 3.7: Gráfica de $y = \sin x + \cos x$

4.- $y = \dfrac{x+3}{x-2}$

Solución:

El dominio de la función es $Dom\ y : \mathbb{R} - \{2\}$
Paso 1:

$$y'' = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2} = \frac{-5}{x^2-4x+4} = 0$$

Se puede ver que $y' < 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ es decir y es decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$

$$y'' = \frac{5(2x-4)}{(x-2)^4} = \frac{10}{(x-2)^3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Vemos que y es convexa en todo su dominio.
Asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$$

Existe asíntota vertical en $x = 2$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$$

Existe asíntota horizontal en $y = 1$, además por la última observación no existe asíntota oblicua.

Paso 2:
Intersección con el eje y: $y = -3/2$
Intersección con el eje x: $x = -3$
Asíntota vertical: $x = 2$
Asíntota horizontal: $y = 1$

Paso 3:

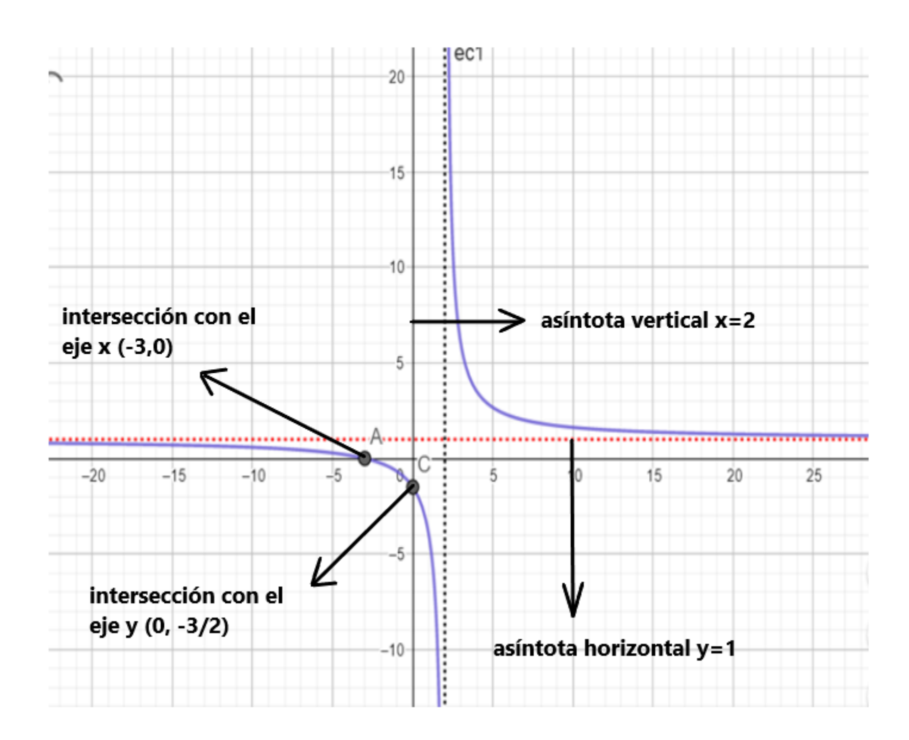


Figura 3.8: Gráfica de $y = \dfrac{x+3}{x-2}$

5.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Solución:

El dominio de la función es: $Dom : \mathbb{R} - \{-1\}$
Paso 1:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0$$

puntos críticos: $x = 0$, $x = -2$

Intervalo	Valor de prueba	signo f'	comportamiento
$(-\infty, -2)$	$f'(-3) = 0,75$	+	creciente
$(-2, -1)$	$f'(-3/2) = -3$	-	decreciente
$(-1, 0)$	$f'(-1/5) = -1/3$	-	decreciente
$(0, +\infty)$	$f'(2) = 4/3$	+	creciente

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x42+2x+1)-(2x+2)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} = 0$$

No existe $f''(-1)$

Intervalo	Valor de prueba	signo f''	comportamiento
$(-\infty, -1)$	$f''(-2) = -2$	-	cóncava
$(-1, +\infty)$	$f''(0) = 2$	+	convexa

Asíntota vertical:
$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$
Existe asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota horizontal:
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$
No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x+1}) - x$$
$$= \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1}) = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -1$$

Existe asíntota oblicua en $y = x - 1$

Paso 2:
En $c = -2$: máximo local, $f(-2) = -4$
En $c = 0$: mínimo local, $f(0) = 0$
Intersección con el eje y y eje x: el origen
Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota oblicua: $y = x - 1$

Paso 3:

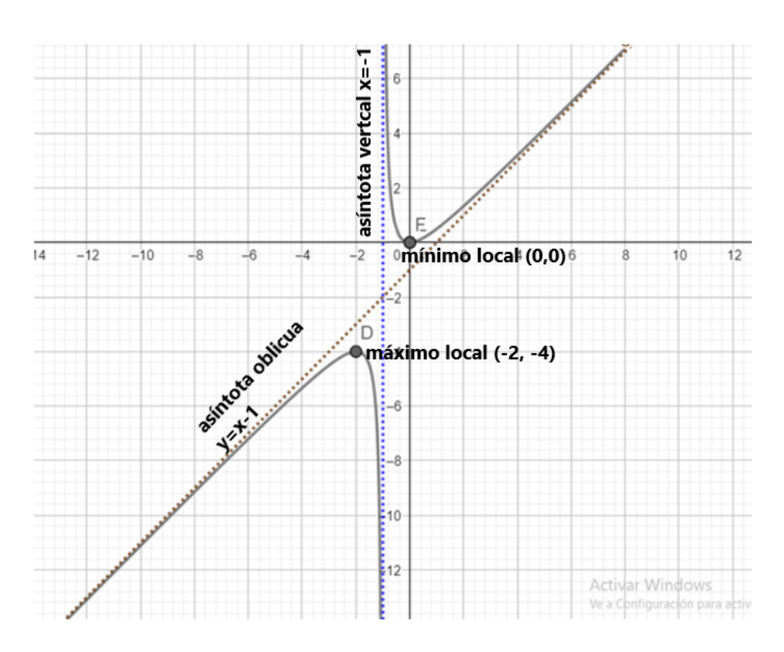


Figura 3.9: Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Ejercicios propuestos:

En los ejercicios 1-12 contruir la gráfica de las siguientes funciones:

1.- $y = x^4 - 2x^2 + 6$

2.- $y = \frac{1}{2}x^3 + 4\sqrt{x}$

3.- $f(x) = \cos(x^2)$, $[-3/2, 3/2]$

4.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 4}{x + 6}$

5.- $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$, $[-\pi/2, \pi/2]$

6.- $y = \dfrac{x}{1 - |x|}$

7.- $y = 18(x - 3)(x - 1)^{2/3}$

8.- $y = 2\sin x - \cos^2 x$, $[0, 2\pi]$

9.- $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

10.- $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$

11.- $f(x) = x + \sin x$

12.- $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

13.- Construir la gráfica del ejercicio 3 de la sección 3.2

14.- Construir la gráfica del ejercicio 10 de la sección 3.3

15.- Si $f(x) = |x|^a |x - 1|^b$, donde a y b son números racionales positivos, demuestre que f tiene un valor máximo relativo igual a la expresión:

$$\frac{a^a b^b}{(a + b)^{a+b}}$$

3.5. Optimización aplicada

Este tipo de problemas se basan en tratar una función, cuyo máximo/mínimo se quiere determinar.
Una vez que esta función se haya determinado, se pueden aplicar las técnicas que se han desarrollado en las anteriores secciones.

Pasos para resolver un problema de optimización aplicada:
Paso 1: Elegir las variables y si es posible realizar un gráfico.
Paso 2: Encontrar la función objetivo y el intervalo.
Paso 3: Optimizar la función.

Observación:
Después de hallar la función bjetivo:
Para Intervalos cerrados:
i) Hallar los puntos críticos de $f(x)$ en $[a, b]$.

ii) Evaluar $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos del intervalo a y b.

iii) El mayor y el menor de esos valores son los valores extremos de $f(x)$ en $[a, b]$.

Para Intervalos abiertos:
Cuando se debe optimizar sobre un intervalo abierto, no está garantizado ese máximo/mínimo exista. Sin embargo, si existe un máximo/mínimo, éste debe darse en un punto crítico.

Ejemplos:

1.- Encontrar un número en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ tal que la suma de dicho número con su recírpoco sea:
a) el más pequeño posible
b) el más grande posible

Solución:

Paso 1:
Sean x : el número que se encuentra en el intervalo dado
s : la suma de los números

Paso 2:

$$s(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$s'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

puntos críticos: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
Se descarta x_2 porque no pertenece al intervalo dado, luego para hallar tanto el valor máximo como el valor mínimo y puesto que se trata de un intervalo cerrado debemos evaluar la función tanto en los puntos críticos como en los extremos:
$s(1/2) = 2,5$, $s(3/2) \approx 2,16$, $s(1) = 2$
La suma es máxima si $x = 1/2$ y es mínima si $x = 1$

2.- Un rectángulo está inscrito en un triángulo rectángulo como se muestra en la figura. Encontrar las dimensiones del rectángulo con la mayor área posible.

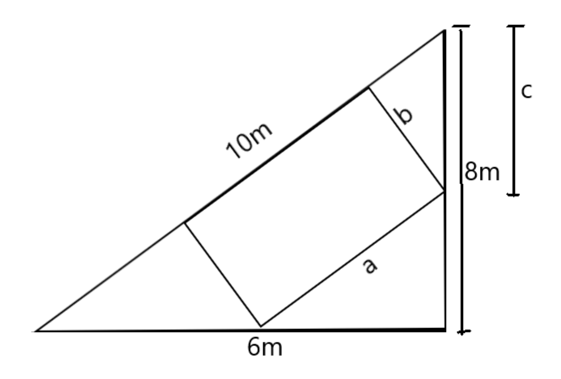


Figura 3.10: Ejemplo 2

Solución:

Paso 1:
Sean a, b : lados del rectángulo
A : área del rectángulo

Paso 2:
Por semejanza de triángulos, en la figura: $\dfrac{6}{10} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = \dfrac{3c}{5}$ (1)
Además, $\dfrac{8-c}{a} = \dfrac{8}{10} \Rightarrow c = 8 - \dfrac{4a}{5}$ (2)
Reemplazando (2) en (1): $b = \dfrac{24}{5} - \dfrac{12a}{25}$, luego el área del rectángulo inscrito es:

$$A(a) = ba = \frac{24}{5}a - \frac{12}{25}a^2$$

Para el intervalo, notemos que $A(a) \geq 0$, luego $a(\frac{24}{5} - \frac{12}{25}a) \geq 0 \;\Rightarrow a \in [0, 10]$

Paso 3:

$$A'(a) = \frac{24}{5} - \frac{24}{25}a = 0$$

punto crítico: $a = 5$
Notemos que $a = 5$ está en el intervalo, luego procedemos a evuluar la función en los extremos y el punto crítico:
$A(0) = 0$, $A(10) = 0$, $A(5) = 12$
Por tanto, el área es máxima cuando $a = 5$ y $b = 12/5$

3.- Encontrar la altura y el radio de un cono de generatiz L tal que su volumen sea máximo.

Solución:
Paso 1:

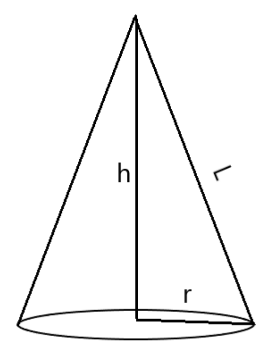


Figura 3.11: Ejemplo 3

Sean r : radio del cono

h : altura del cono
V : volumen del cono

Paso 2:
Se sabe que el volumen de un cono es $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, luego por Pitágoras:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(L^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi L^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Para el intervalo: $r^2 \geq 0 \ \Rightarrow L^2 - h^2 \geq 0 \ \Rightarrow h \in [0, L]$

Paso 3:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi L^2 - \pi h^2 = 0$$

puntos críticos: $\underbrace{h = \frac{-L}{\sqrt{3}}}_{\text{No está en el intervalo}}$, $h = \frac{L}{\sqrt{3}}$

Procedemos a evaluar la función:
$V(0) = 0$, $V(L) = 0$, $V(L/\sqrt{3}) = \dfrac{2\pi L^3}{9\sqrt{3}}$
Por tanto, el volumen del cono será máximo cuando $h = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$ y $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}L$

4.- Encontrar las coordenadas de un punto P en la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$, donde el segmento de recta tangente en P que se interseca con los ejes coordenados tenga longitud mínima.

Solución:

Paso 1:
Sean $P = (x_0, y_0)$: los puntos donde pasa la recta tangente
L : el segmento de recta tangente en P
(x, y) : puntos de intersección con los ejes

Realicemos un gráfico:

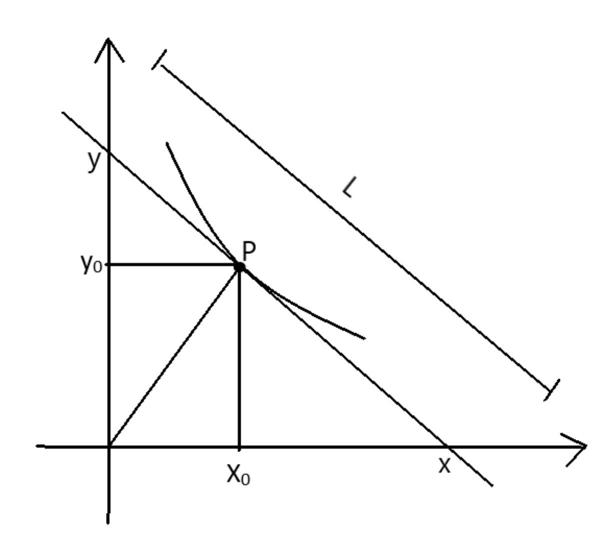


Figura 3.12: Ejemplo 4

Paso 2:

$y' = \dfrac{-2}{x^3}$, recordemos que del Álgebra, hay un teorema que dice que la distancia mínima de un punto a una recta L es la longitud de la recta perpendicular que se forma entre el punto y la recta L.

Entonces para que el segmento de recta tangente en P tenga una distancia mínima se necesita que el segmento de recta desde el origen hasta el punto P sea ortogonal a la recta L.

Ahora, por el teorema del valor medio de Lagrange en P :

$$y(x) - y(x_0) = y'(x)(x - x_0)$$
$$y - \frac{1}{x_0^2} = \frac{-2}{x_0^3}(x - x_0)$$
$$y = \frac{3}{x_0^2} - \frac{2}{x_0^3}x$$

Intersección con el eje $y : y = \dfrac{3}{x_0^2}$ (1)

Intersección con el eje $x : x = \frac{3}{2}x_0$ (2)

Ahora, por Pitágoras:
$L^2 = x^2 + y^2$, reemplazando (1) y (2) en esta expresión:

$$L^2(x_0) = \frac{9}{4}x_0^2 + \frac{9}{x_0^4}$$

Paso 3:
Si L tiene longitud mínima entonces L^2 también tendrá longitud mínima, luego:

$$(L^2)' = \frac{9}{2}x_0 - \frac{36}{x_0^5} = 0$$
$$9(x_0^6 - 8) = 0$$
$$x_0^6 = 8$$

puntos críticos: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
Claramente x_1 no podemos tomar, porque tenemos la condición que $x > 0$, por tanto tomamos $x_0 = x_2$, para hallar y_0 notemos que $y_0 = \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{2}$.

Por tanto, las coordenadas de P son $x_0 = \sqrt{2}$ y $y_0 = \frac{1}{2}$

5.- **Ley de Snell:** Cuando un rayo de luz viaja de un punto A, situado por encima de la superficie de una piscina a un punto B por debajo del agua, lo hace siguiendo una trayectoria que emplea el menor tiempo. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua (se sabe que $v_1 > v_2$).Demostrar la ley ley de Snell de la refraciión:

$$\frac{\sin \Theta_1}{v_1} = \frac{\sin \Theta_2}{v_2}$$

Se ilustra la figura a continuación:

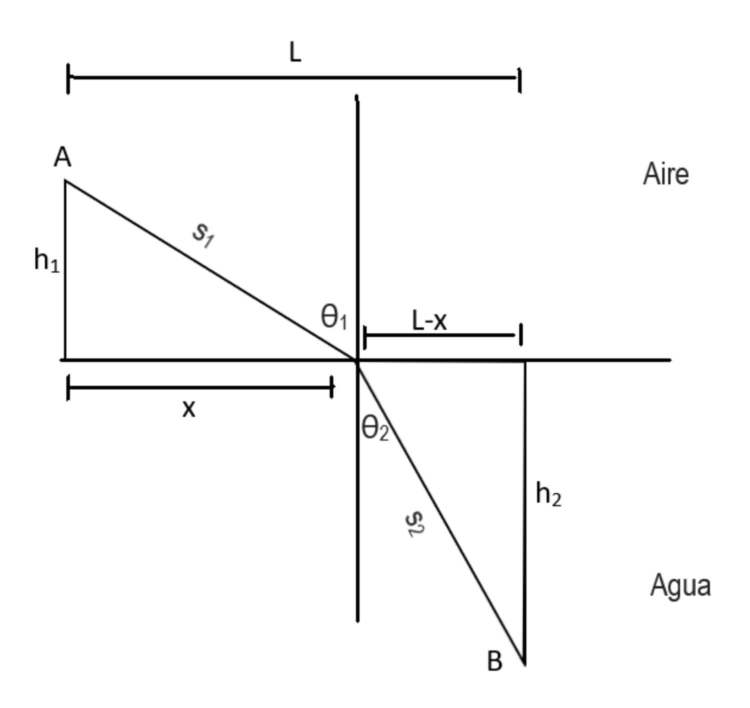


Figura 3.13: Ejemplo 5

Solución:

Paso 1:
Sean L : longitud de la refracción
$t(x)$: el tiempo
h_1, h_1 : alturas
x : longitud horizontal del origen al punto A

Paso 2:
Para A:
$s_1 = \underbrace{s_0}_{0} + v_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{s_1}{v_1} \Rightarrow t_1(x) = \dfrac{s_1}{v_1}$, además notemos que en el gráfico: $s_1 = \sqrt{x^2 + h_1^2} \Rightarrow t_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1}$

Para B :

$s_2 = s_0 + v_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v_2}$, además $s_2 = \sqrt{(L-x)^2 + h_2^2} \Rightarrow t_2(x) = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}{v_2}$

En general: $t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}{v_2}$, $x \in [0, L]$

Paso 3:

$$t'(x) = \frac{\underbrace{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}\right)}_{\sin \Theta_1}}{v_1} - \frac{\underbrace{\left(\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + h_2^2}}\right)}_{\sin \Theta_2}}{v_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \Theta_1}{v_1} = \frac{\sin \Theta_2}{v_2}$$

6.- Hallar el punto P sobre la parábola $y = x^2$ más cercano al punto (3,0).

Solución:

Paso 1:
Sea d : la distancia al oriden

Paso 2:
$d^2 = (x-3)^2 + y^2$, como $y = x^2$:
$d^2 = x^2 - 6x + 9 + x^4$, $x \in (0, 3)$

Paso 3:

$$(d^2)' = 4x^3 + 2x - 6 = 0$$

punto crítico: $x = 1 \in [0, 3]$
Procedemos a evaluar la función en el punto crítico salvo en los extremos ya que se trata de un intervalo abierto

$d(1) = \sqrt{5}$
Por tanto el punto más cercano a (0,3) es $P = (1, 1)$

Ejercicios Propuestos:

1.- Encontrar un número en el intervalo $\left[\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right]$ tal que la resta con su cuadrado se la más pequeña posible

2.- Un ranchero piensa usar 900m de valla para rodear un corral de forma rectangular con un semicírculo en la parte superior, cuyo diámetro coincide con un lado del rectángulo. Hallar las dimensiones del corral de área máxima.

3.- Hallar el radio y la altura de una lata cilíndrica de área total A cuyo volumen sea la mayor posible. ¿Existe un cilindro de área A y volumen total mínimo?

4.- Hallar el área máxima de un rectángulo circunscrito en otro rectángulo de lados L y H.

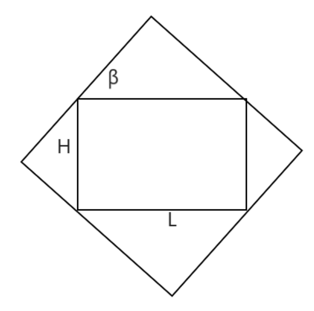


Figura 3.14: Ejercicio 4

5.- Encuentre la coordenada x del punto P en la parábola $y = 1 - x^2$, $(0 < x \leq 1)$.
Donde el triángulo que está encerrado por la recta tangente en P y los ejes coordenados tienen el área más pequeña.

6.- Se desea hacer un canal de drenaje de modo que su sección transversal sea un trapezoide con lados igualmente inclinados (ver la figura), si los lados y el fondo tienen todos una longitud de 5 pies, ¿cómo debe elegirse el ángulo $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ para obtener la mayor área posible en la sección transversal del canal?

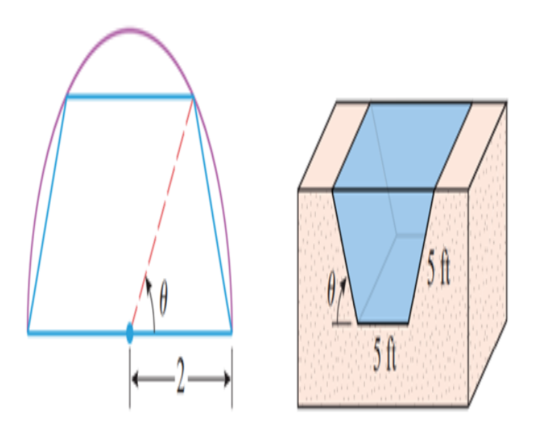


Figura 3.15: Ejercicio 6

7.- Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de menor área posible que se puede circunscribir alrededor de un círculo de radio R.

8.- Encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto de mayor superficie que se puede inscribir en una esfera de radio R.

9.- **Principio de Fermat:** en óptica establece que la luz que viaja de un punto a otro sigue ese camino para el cual el tiempo total de viaje es míni-

mo. En un medio uniforme, las trayectorias de “tiempo mínimo” y “distancia más corta” resultan ser las mismas, de modo que la luz, si no está obstruida, viaja a lo largo de una línea recta. Suponga que tenemos una fuente de luz, un espejo plano y un observador en un medio uniforme. Si un rayo de luz sale de la fuente, rebota en el espejo y viaja hacia el observador, entonces su trayectoria consistirá en dos segmentos de línea, como se muestra en la figura Según el principio de Fermat, el camino será tal que el tiempo total de viaje t sea mínimo o, dado que el medio es uniforme, el camino será tal que la distancia total recorrida de A a P a B sea lo más pequeña posible.

Asumiendo que ocurre el mínimo cuando $\dfrac{dt}{dx} = 0$ demuestre que el rayo de luz incidirá en el espejo en el punto P donde el **"ángulo de incidencia"** θ_1 es igual al **"ángulo de reflexión"** θ_2.

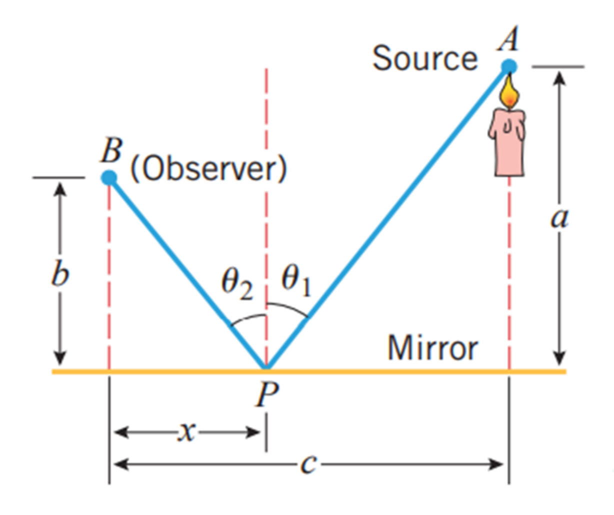


Figura 3.16: Ejercicio 9

10.- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(3,4)$ y forma con el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

11.- Un punto móvil P describe la curva $y = \dfrac{4}{x}$, $x > 0$. Determinar la distancia mínima de P al origen.

12.- Hallar la base y la altura de un triángulo isósceles de área mínima circunscrito a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y cuya base sea paralela al eje x.

13.- Una persona está en un bote a 3 millas del punto más cercano a la playa y desea alcanzar en el menor tiempo posible una caseta de la playa, situada a una distancia de 5 millas en la perpendicular a la recta que una la posición del bote y el punto de la playa, suponiendo que puede caminar a razón de 5 millas por hora y remar a la velocidad de 4 millas por hora. Determinar el lugar donde debe descender a tierra.

14.- Diseñar una lata cilíndrica de $700cm^3$ de tal manera que se utilice la menor cantidad de metal. En otras palabras, minimizar la superficie de la lata.

Bibliografía

[1] Jon Rogawski. Calculus Single variable, second edition, 2016

[2] Espinoza Ramos. Análisis Matemático I, tercera edición, 2002.

[3] Howard Anton. Calculus Early Transcendentals, 10th edition, 2012